

φ-Física – Relatividade

Prof. Dr. Luiz Adolfo de Mello

UFS - UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

e-Física – Relatividade

Elaboração de Conteúdo

Prof. Dr. Luiz Adolfo de Mello

Copyright © 2018, Universidade Federal de Sergipe.

Nenhuma parte deste material poderá ser reproduzida, transmitida e gravada por qualquer meio eletrônico, mecânico, por fotocópia e outros, sem a prévia autorização por escrito do autor.

**Ficha catalográfica produzida pela Biblioteca Central
Universidade Federal de Sergipe**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SERGIPE

Cidade Universitária Prof. “José Aloísio de Campos”

Av. Marechal Rondon, s/n - Jardim Rosa Elze

CEP 49100-000 - São Cristóvão - SE

Fone(79) 2105 - 6600 - Fax(79) 2105- 6474

Conteúdo - RELATIVIDADE

CAP01 - Cinemática Relativística

- Introdução 01
- As Transformações de Galileu e as Bases da TRR 02
- Bibliografia 08

Capítulo 2: O tempo na Relatividade

- Coordenadas 09
- Relatividade da Simultaneidade 10
- Dilatação do tempo 13
- Animações úteis para visualizar a dilatação do tempo e o conceito de simultaneidade 18
- Bibliografia 19

Capítulo 3: Confirmação Experimental da Dilatação do tempo

- Paradoxo dos gêmeos 20
- Relógios em aviões 21
- Decaimento de múons cósmicos 22
- Bibliografia 25

Capítulo 4: O Espaço na Relatividade

- Contração do espaço 26
- Medida e Aparência Visual 30
- Limite não relativístico das expressões da dilatação do tempo e contração do espaço 31
- A contração do espaço evidenciada pelos múons de origem cósmica 32
- O paradoxo da vara e do telhado 34
- Bibliografia 36

Cap5 - "Adição" Relativística de Velocidades

- "Adição" Relativística de Velocidades 37
- Exemplos 40
- Efeito Doppler para a luz 42
- Bibliografia 47

Cap6 - Diagramas Espaço-Temporal para um Referencial Inercial S

- Diagramas Espaço-Temporal para um Referencial Inercial S 48
- Representação do referencial S' em movimento em relação a S, no diagrama espaço tempo de S 50
- Dilatação do tempo com diagrama espaço-tempo 52
- O intervalo de espaço-tempo 54
- EXEMPLO 56
- Bibliografia 58

Capítulo 7: GPS como exemplo prático de uso da relatividade 59

- Como funciona um receptor GPS 59
- Triangulação 61
- Localização com o GPS 62
- Exercício: precisão 63

Cap8 - DINÂMICA RELATIVÍSTICA

- A necessidade de redefinir o momento 65
- O momento relativístico e a massa relativística 68
- Energia relativística 72
- Exemplo: Decaimento α 75
- Velocidade Limite 78
- Energia de uma Partícula Livre 78
- Corpo Livre 80
- Relação Energia-Momentum 80
- A Inércia dos Fótons 81
- Relação Massa-Energia 83
- As Transformações de Lorentz para energia e momento 84

Capítulo 1 - Cinemática Relativística

Introdução

A Teoria da Relatividade Restrita (TRR) foi proposta em 1905 por Albert Einstein como uma generalização da Mecânica Clássica de Newton (MN). Generalização no sentido de que para velocidades muito menores do que a velocidade da luz ela é completamente igual à MN. Com a generalização da MN através da TRR Einstein mostrou que todas as teorias físicas conhecidas na época eram invariantes por uma transformação de coordenadas. Ou seja, que todas as teorias físicas não devem depender do observador, ou de seu referencial. Que a física é uma ciência objetiva que trata de “eventos físicos” cuja realidade e representação matemática independem do referencial em que são descritos.



Fig1.1 – Viajem à Lua; Júlio Verne

O grande sucesso da TRR se deu devido às previsões de que o espaço e o tempo são quantidades relativas e que a massa e a energia são duas grandezas relacionadas, isto é, uma pode se transformar na outra. A TRR, e a Mecânica Quântica deram origem à física moderna. Elas nos trouxeram a energia nuclear, a física de partículas e toda a física do Estado Sólido.

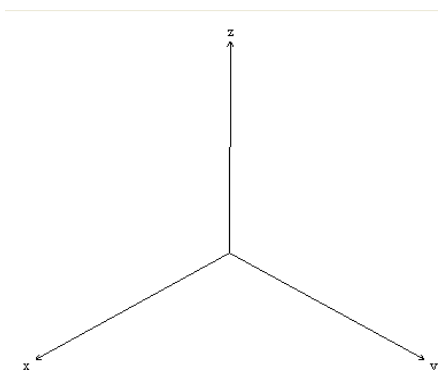
Vamos na próxima seção expor de forma sucinta algumas das motivações que levaram a Albert Einstein a desenvolver e propor a teoria da relatividade restrita (TRR) como generalização da Mecânica Newtoniana (MN). Apesar da MN estar bem descrita no

e-livro Mecânica vamos precisar recordar aqui alguns dos conceitos básicos em que esta se alicerça.

As Transformações de Galileu e as Bases da TRR

O primeiro é o de referencial inercial (RI). Um referencial é um conjunto de três réguas ordenadas perpendiculares entre si, mais um relógio. Ou seja, estamos considerando que por detrás da MN temos uma geometria Euclidiana (nesta época era a única que existia). Um RI é um referencial onde vale as três leis de Newton: a) lei da inércia; b) definição de força; c) lei da ação e reação. Neste referencial as leis de Newton são invariantes, isto é, elas independem do RI em que elas são escritas. Temos que RI diferem entre si pelo fato de estarem se movendo com velocidade uniforme.

Daqui em diante vamos considerar RI que se movem em relação a um e a outro somente na direção paralela ao seu eixo x com velocidade relativa U , e tendo os seus eixos y e z paralelos. Vamos supor que no instante $t = t' = 0\text{seg}$ as suas origens coincidiam. Isto não vai restringir em nada o que vamos deduzir, pois o espaço possui as seguintes propriedades:



- ▶ Homogêneo → As leis da física devem ser as mesmas em qualquer lugar do Universo.
- ▶ Isotrópico → As leis da física devem independem em qual direção um corpo está se movendo.
- ▶ Os Eventos físicos independem do RI

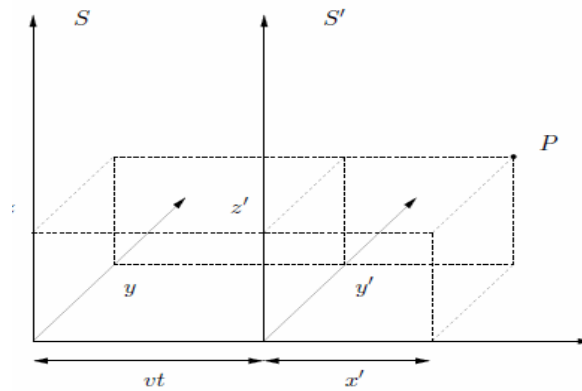


Fig1.2 – Referenciais Inerciais em movimento relativo

Consideremos dois RI denominados de S e S' como descritos acima. Se tivermos um objeto P ocupando as coordenadas (x,y,z) no RI S no instante t, então no referencial S' ele terá coordenadas (x – vt, y', z'). Logo, quando queremos comparar medidas de coordenadas feitas nestes dois referenciais temos que usar as equações de transformações de referenciais de Galileu.

$$x' = x - u.t$$

$$y' = y \quad (1.1)$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

Se o ponto P estiver se movendo com velocidade $V = (V_x, V_y, V_z)$ no referencial S, então no RI S' ele terá velocidade:

$$V_{x'} = dX/dt - u = V_x - u$$

$$V_{y'} = dY/dt = V_y \quad (1.2)$$

$$V_{z'} = dZ/dt = V_z$$

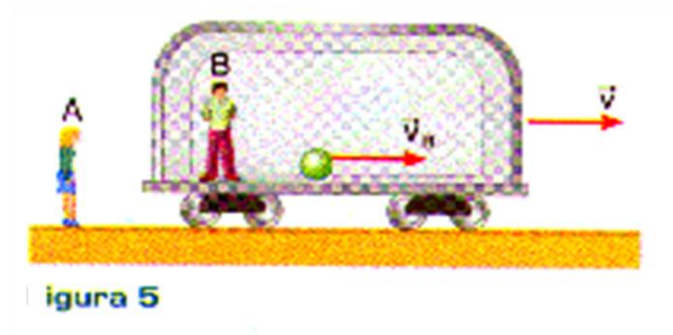


Fig1.3 – Composição clássica de velocidades. $V_A = V_B + v$

Como toda variável dinâmica depende de uma derivada segunda, por exemplo a aceleração $a = d^2x/dt^2$, temos que a MN é invariante por uma transformação de Galileu.

$$F = m.a = m. d^2x/dt^2 \quad (1.3a)$$

$$F' = m.a' = m. \frac{d^2x'}{dt^2} = m. \frac{d^2(x-u.t)}{dt^2} = m. \frac{d^2x}{dt^2} \quad (1.3b)$$

Logo, $F' = F$ e a força é um invariante por uma transformação de Lorentz.

Por trás da Mecânica de Newton temos a definição de Tempo Absoluto. Isto é, o tempo seria duração, sucessão de eventos, a sucessão dos anos, dias, meses ou horas. O tempo seria absoluto e irreversível, onde tudo ocorre nele, mas nada o altera. Fala-se na flecha do tempo, isto é, o tempo só progride. Nunca volta para trás. Na mecânica clássica o espaço e o tempo estão dissociados. Isto é, um independe do outro. Temos as três dimensões espaciais mais o tempo (3 + 1).

Na física pré-relativística se supunha que uma vez sincronizados um conjunto de relógios estes poderiam ser transportados e postos em movimentos sem alterar a sua sincronização. Veremos adiante que isso não pode ser feito em uma “física” em que o eletromagnetismo seja universal.

Por volta de 1860, James Clerck Maxwell descobriu que as leis empíricas da eletricidade e do magnetismo podiam ser resumidas em um sistema de quatro equações matemáticas que mais tarde vieram a ser conhecidas como equações de Maxwell e que, entre outras coisas, previam a existência de ondas eletromagnéticas, cuja velocidade de propagação era dada por $c = \frac{1}{\sqrt{(\epsilon_0\mu_0)}}$. A excelente concordância entre este valor teórico e as medidas experimentais da velocidade da luz visível, bem como outras propriedades previstas corretamente, levaram à descoberta de que a luz visível era de fato um onda eletromagnética.

fórmula de Maxwell

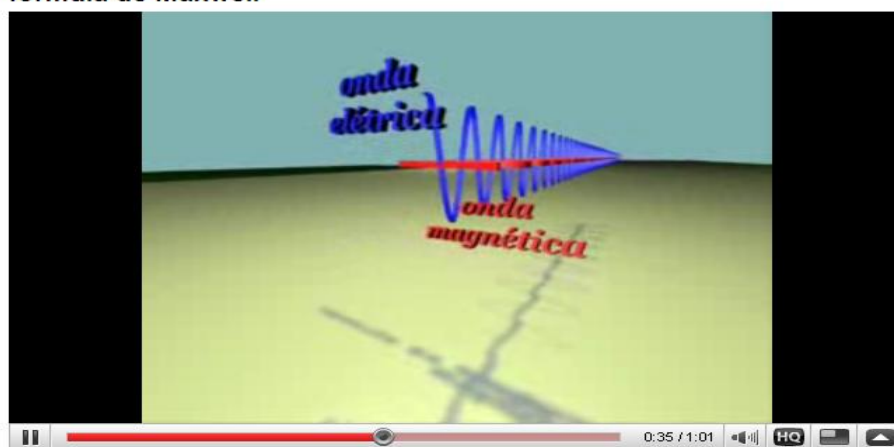


Fig.1.4 – Onda Eletromagnética. <http://www.youtube.com/watch?v=tl1NYfnCHac>


Assim, é natural perguntar-se em qual referencial as ondas eletromagnéticas têm velocidade c . Segundo o primeiro princípio da relatividade restrita, em todos os referenciais inerciais as ondas eletromagnéticas têm velocidade c . Mas, segundo a mecânica clássica, se a velocidade da luz for medida como c num referencial inercial S , então em outro referencial inercial S' a velocidade medida seria $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$. Se este raciocínio estiver correto, concluímos que existe um referencial absoluto, ou referencial do "éter" a onde valem as equações de Maxwell.

Como se pode ver abaixo as equações de Maxwell não são invariantes por uma transformação de Galileu. Se tomarmos a equação de uma onda unidimensional se propagando na direção x temos:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

\downarrow

$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$



$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x',t')}{\partial t'^2} - \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{\partial^2 \tilde{u}(x',t')}{\partial x'^2} - \frac{2v}{c^2} \frac{\partial^2 \tilde{u}(x',t')}{\partial x' \partial t'} = 0$$

Fig. – Newton x Maxwell (tirado de aula 5)

O que mostra que esta muda de forma na mudança de referencial, mas para $v \ll c$ ela volta ser a equação de onda original.

A experiência de Michelson. Do ponto de vista de Lorentz, de acordo com o qual deva existir um certo sistema de referência, vinculado ao éter universal, que se mantém em repouso absoluto, foi rejeitado por experiências diretas.

Se a velocidade da luz só fosse igual a 300.000 km/s num sistema vinculado ao éter, então, medindo a velocidade da luz em qualquer outro sistema inercial, poder-se-ia observar o movimento deste sistema em relação ao éter e determinar a velocidade deste movimento. Tal como num sistema que se mova em relação ao ar surge vento, quando se dá o movimento em relação ao éter (isto, claro, admitindo que o éter existe) deveria surgir "vento de éter". A experiência para verificação do "vento de éter" foi realizada em 1881 pelos cientistas americanos A. MICHELSON e E. MORLEY, segundo uma idéia sugerida 12 anos antes por Maxwell.

Nesta experiência compara-se a velocidade da luz em duas direções perpendiculares do movimento da Terra. A medição foi feita com grande exatidão com o auxílio de um instrumento especial - interferômetro de Michelson. As experiências foram realizadas a diferentes horas do dia e em diferentes épocas do ano. Mas obteve-se sempre um resultado negativo: não foi possível observar o movimento da Terra em relação ao éter.

Esta situação é semelhante à que se verificaria se, deitando a cabeça de fora pela janela de um automóvel à velocidade de 100 km/h, não sentíssemos o vento soprando contra nós.

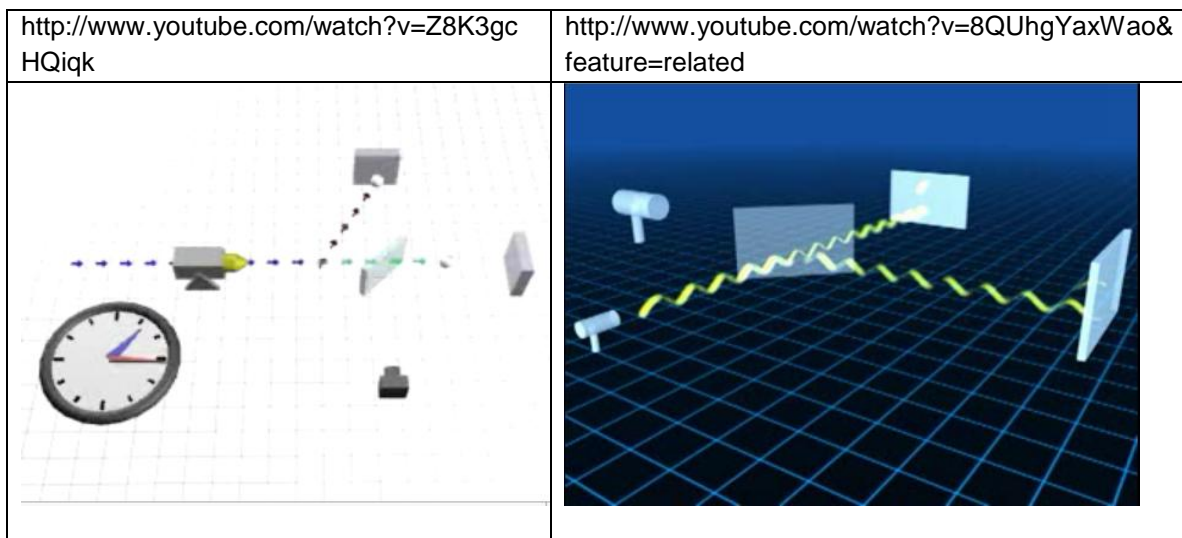


Fig1.5 – Experimento de Michelson e Morley

Deste modo, a hipótese da existência de um sistema de referência privilegiado também foi rejeitada experimentalmente. Por sua vez, isto significava que não existe nenhum meio especial, "éter", ao qual se possa vincular esse tal sistema privilegiado.

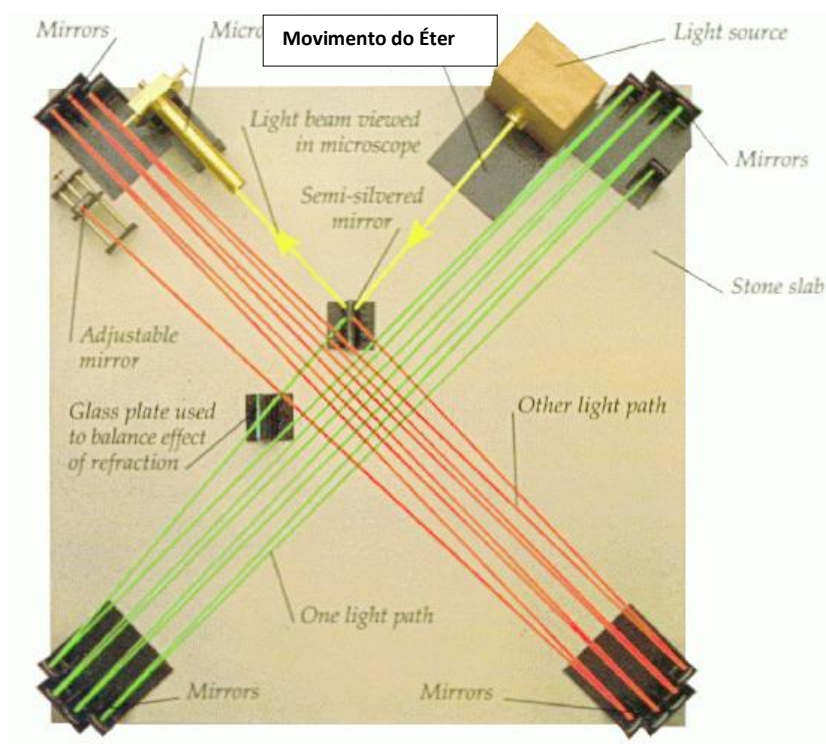


Fig1.6 – Experimento de Michelson e Morley

Para tentar "salvar" o éter, várias idéias foram sugeridas. Também, procurou-se modificar o eletromagnetismo de Maxwell. Algumas destas tentativas são apresentadas na [leitura complementar](#).

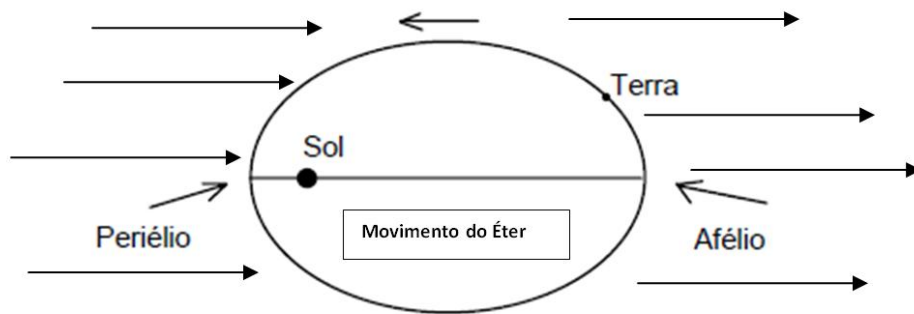
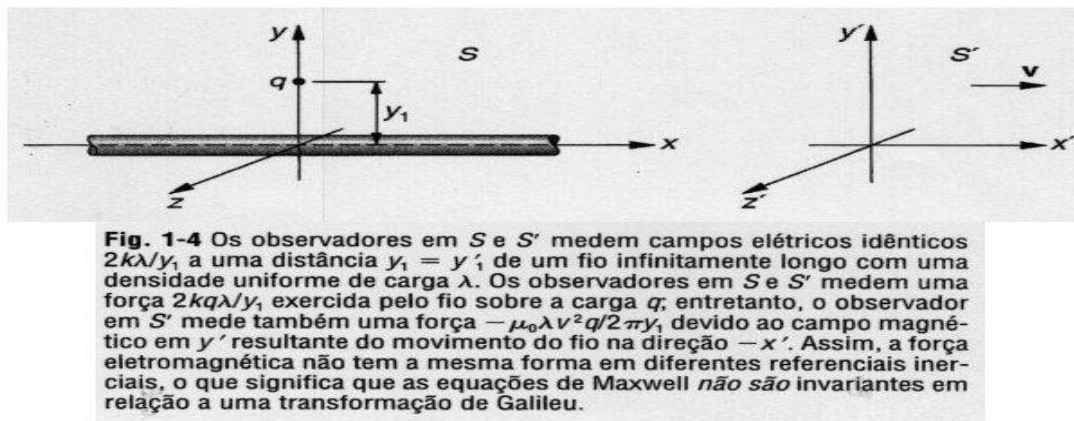


Fig1.7 – Movimento relativo da Terra em relação a um suposto meio.

Consideremos agora mais um exemplo:



Vemos assim que enquanto Einstein acreditava que a descrição dos fenômenos físicos, inclusive os eletromagnéticos, não deveria depender do referencial, a física clássica prevê uma descrição de fenômenos eletromagnéticos que depende do referencial. De fato, o uso da relatividade restrita permite uma descrição da experiência da figura que não depende do referencial. Infelizmente, neste curso, não teremos tempo para abordar esse tema (ver por exemplo, para um caso similar ao da figura: Griffiths "Introduction to Electrodynamics" seção 12.3).

Assim, vemos que os dois princípios da relatividade restrita exigem que seja feita uma revisão de mecânica clássica. Faremos isso nos próximos capítulos e também veremos que fenômenos novos são previstos: dilatação do tempo, contração dos comprimentos, equivalência massa-energia; os quais são experimentalmente comprovados.

Mas porque substituir a Mecânica Newtoniana?

- ▶ A mecânica Newtoniana não considera que a velocidade da Luz é finita.
- ▶ Ela pressupõe ação à distância instantânea.
- ▶ Pelo princípio de relatividade de Galileu a luz teria velocidade diferente para referenciais inerciais diferentes.

- As equações de Maxwell não seriam invariantes por uma transformação de Lorentz.

Bibliografia

MOURÃO, Ronaldo R. de Freitas. *Explicando a Teoria da Relatividade*, Editora Tecnoprint S.A., 1987.

BAGNATO, Vanderlei S. (Assistência de Luiz G. Marcassa). *Introdução à Relatividade Especial* A.P. French, Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series

Moises, Curso de Física Básica, vol.4, Ed. Blucher.

Tipler, Física Moderna. Ed. LTC

Ronaldo Carlotto Batista; Notas de aula; plato.if.usp.br.

Capítulo 2: O tempo na Relatividade

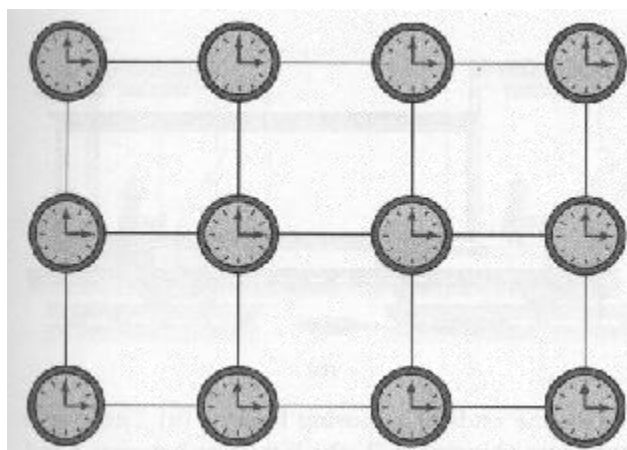
Ronaldo Carlotto Batista

Coordenadas

Para começarmos a tirar conclusões a partir do 2º princípio da relatividade (sobre a constância da velocidade da luz), temos que definir alguns termos.

Um **evento** é algo que acontece, como por exemplo: uma porta que se fecha, a queda de um raio, a explosão de uma estrela, etc., e tem existência independente de qualquer referencial. Os eventos são descritos por observadores que, por sua vez, estão associados a referenciais. (Por enquanto, estaremos sempre nos referindo a referenciais inerciais.) Matematicamente, podemos descrever um evento através de 3 coordenadas espaciais $\{x, y, z\}$ e 1 temporal t .

Um **referencial** pode ser pensado como uma grade nas coordenadas espaciais, com relógios sobre as intersecções dos pontos de cada eixo, como mostra a figura abaixo:

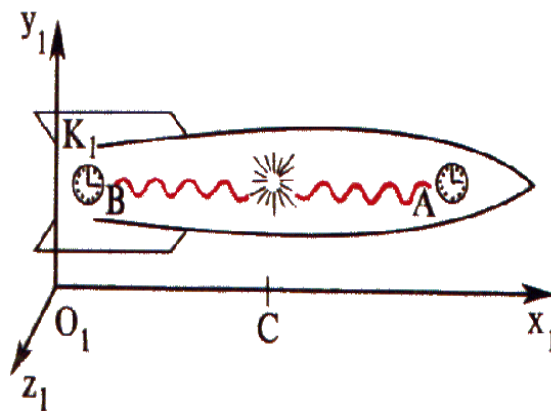


Digamos que o espaçamento entre pontos da grade seja conhecido e igual a, por exemplo, **1m**. Para sincronizar esses relógios, vamos usar como relógio de referência aquele que se encontra na origem dos eixos do referencial. Esse relógio é então colocado para funcionar com o ponteiro em zero e no mesmo instante é emitido um sinal luminoso com frente de onda esférica. Quando este sinal atinge os relógios distribuídos a **1m** de distância da origem do sistema de coordenadas, estes últimos devem marcar um tempo t igual a $1\text{m}/299.792.458 \text{ m/s}$. Assim, com antecedência, ajustamos os relógios a **1m** de distância da origem com o ponteiro sobre este tempo e os programamos para funcionar quando são atingidos pelo sinal luminoso do primeiro relógio. Podemos repetir este procedimento para os relógios a **2m**, **3m** e etc. Desta maneira, somos capazes de sincronizar todos os relógios **fixos** dentro de um referencial inercial. (Obs: Nós não podemos agrupar os relógios, sincronizá-los e os afastar, pois este movimento pode afetar o tempo, como veremos adiante.)

Relatividade da Simultaneidade

Uma hipótese na base da mecânica newtoniana consiste em assumir a existência de um tempo universal e absoluto, igual para todos os referenciais inerciais, independentemente da velocidade relativa entre eles. Por isso, na mecânica newtoniana, eventos simultâneos em um referencial inercial também o serão em outro referencial inercial. Entretanto, veremos que, isso não vale na relatividade de Einstein, por consequência direta do segundo postulado.

O que de fato nós queremos dizer com **eventos simultâneos**? Suponha que dois observadores, ambos situados em um referencial S , em pontos distintos A e B , combinam de explodir uma bomba em t_0 . Um relógio em C , eqüidistante de A e B , registra a luz da explosão no mesmo instante. Outros relógios posicionados em S registram primeiro a chegada da luz de A ou de B , dependendo da sua localização, mas depois de corrigidos para levar em conta o tempo de percurso da luz, os dados registrados por todos os relógios indicam que as explosões foram simultâneas. Assim, daqui em diante, *na relatividade restrita, definiremos dois eventos como simultâneos em um referencial inercial se os sinais luminosos associados a esses eventos forem observados simultaneamente por observadores situados em pontos eqüidistantes à posição dos dois eventos. Esta definição não vale classicamente (ver detalhes mais adiante).*

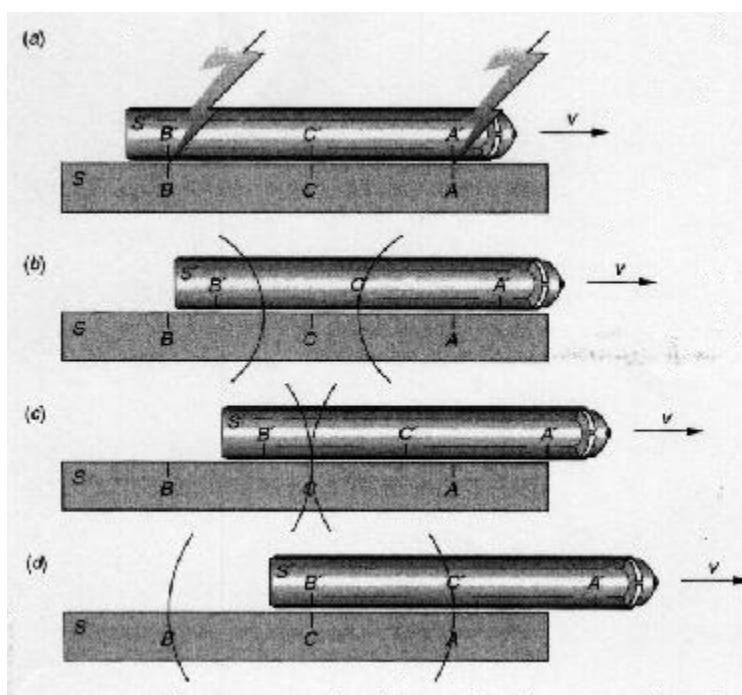


Importante:

Agora queremos mostrar o seguinte: De acordo com a relatividade restrita, dois eventos que são simultâneos em um referencial inercial não são simultâneos em nenhum outro referencial que esteja em movimento em relação ao primeiro.

Para tanto, usamos um exemplo proposto por Einstein. Imagine que um trem está passando pela plataforma de uma estação com velocidade \vec{v} . O referencial ligado à plataforma é chamado S e o referencial ligado ao trem é chamado S' . Dois raios caem deixando marcas permanentes sobre o trem e a plataforma, em A e B para S' , que

coincidem com A' e B' para S' . Em adição, supomos que no instante que os raios caem os observadores estão localizados em C no meio de A e B e C' no meio de A' e B', conforme a figura (a). Para fixar as idéias, supomos que para S , os relâmpagos são simultâneos, isto é, C recebe, no mesmo instante, a frente de luz de A e aquela de B: conforme a figura (c). Qual é o ponto de vista do observador em S' ? Durante a viagem para a esquerda da frente de luz emitida pelo raio na frente do trem, C' viaja para a direita. Então ele encontra esta frente primeiro: conforme a figura (b). A frente emitida pelo raio que caiu na parte de trás do trem atinge C' mais tarde: conforme a figura (d). Assim, para C', os raios não são simultâneos.



Nesse ponto é conveniente voltarmos para trás e repensar nossa experiência em termos clássicos e em termos relativísticos. Dizemos que o observador em C recebe a luz dos dois raios simultaneamente. Como os dois pulsos chegaram juntos após terem percorrido distâncias iguais com a mesma velocidade, conclue-se que eles foram emitidos simultaneamente. Essa conclusão está correta clássica e relativisticamente.

Já o observador em C' vê primeiro o raio que atinge o vagão da frente e depois o raio que atinge o último vagão. Aqui também isto vale clássica e relativisticamente. A diferença está na interpretação deste fenômeno. Classicamente os observadores em S e S' concordam que os raios caíram simultaneamente pela seguinte razão: C' vê primeiro o raio atingindo A' e depois B' mas a velocidade da luz no referencial S' é $-\vec{c} - \vec{v}$ para o pulso que sai de A' e $\vec{c} - \vec{v}$ para o pulso que sai de B', sendo c a velocidade da luz em S . Chamemos de l o comprimento do trem. O tempo que a luz leva para percorrer a distância A'C' é

$$\Delta t'_A = l / [2(c + v)]$$

e o tempo que a luz leva para percorrer a distância B'C' é

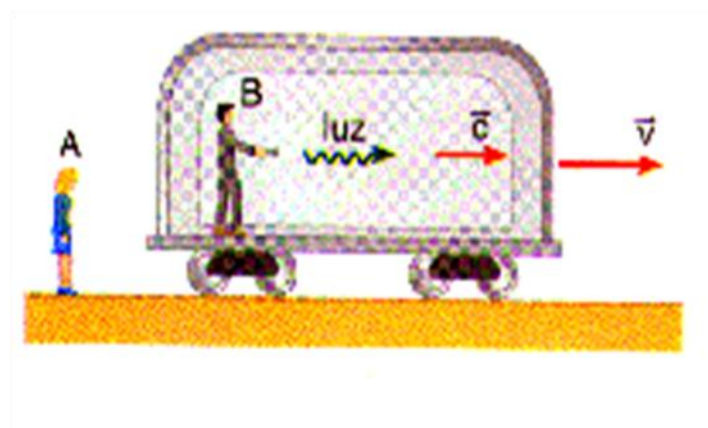
$$\Delta t'_B = l / [2(c - v)] .$$

Podemos ver que $\Delta t'_A < \Delta t'_B$, então o fato de C' receber primeiro o sinal de A' e depois de B' é consequência da diferença entre as velocidades $c + v$ e $c - v$ dos sinais. Levando isso em conta temos que classicamente para C' os raios são simultâneos. Para C' os dois pulsos luminosos tiveram que percorrer distâncias iguais com velocidades iguais. O fato de a luz de um dos raios chegar antes da outra implica que os raios não foram emitidos simultaneamente em S'. Vemos aqui o papel crucial do 2º princípio da relatividade.



Ver o vídeo: http://www.youtube.com/watch?v=ts8BV_fxLcQ&feature=related

Do ponto de vista relativístico, a velocidade da luz é c tanto para C como para C'. Seja um observador A fixo em relação ao solo, observa um vagão cuja velocidade em relação ao solo é v . Um observador B dentro do vagão acende uma lanterna de modo que, para o observador B a velocidade da luz é c . Segundo postulado de Einstein, para A a velocidade da luz emitida pela lanterna também é c , e não $c + v$. Tanto para A como para B a velocidade da luz é c !



Einstein/Lorentz (parte2) Video sobre a relatividade da simultaneidade.

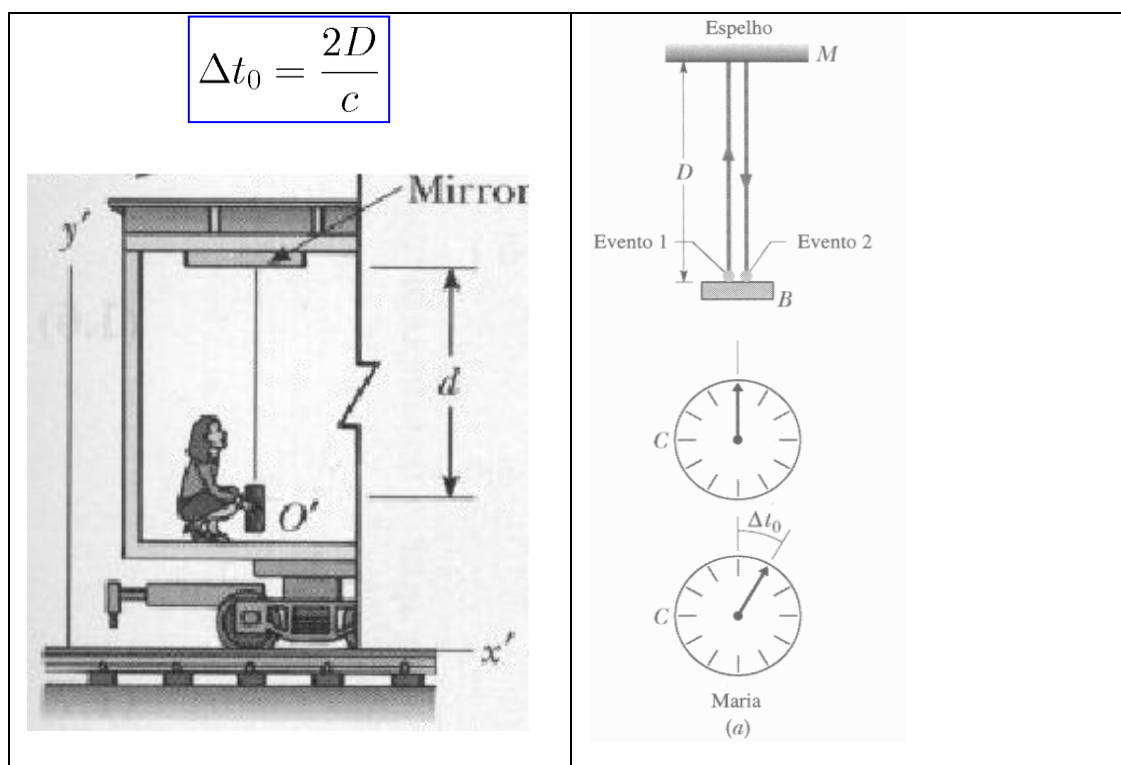
http://www.youtube.com/watch?v=ts8BV_fxLcQ&feature=related

Einstein/Lorentz (parte 2)

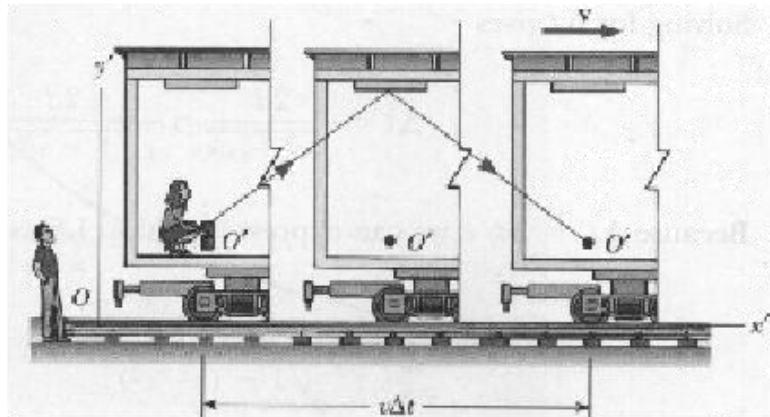


Dilatação do tempo

Agora que vimos que a noção de simultaneidade é relativa, vamos ver que a própria medição de tempo também é. Vamos repensar o exemplo do trem, mas agora supondo que este se encontra parado. Um observador O' (ver figura abaixo) dentro do trem emite um pulso de luz perpendicularmente ao comprimento do trem, de modo que este tenha que percorrer a distância “ d ” até um espelho posicionado no teto do trem. Este mede o tempo de ida e volta deste pulso e obtém: $\Delta t' = 2d/c$. Para este observador o pulso sai de um lugar e volta ao mesmo ponto. Ele usou apenas **um** relógio para medir $\Delta t'$. Um segundo observador O fora do trem pode fazer esta medida com equipamento similar e encontrar o mesmo resultado para $\Delta t'$.

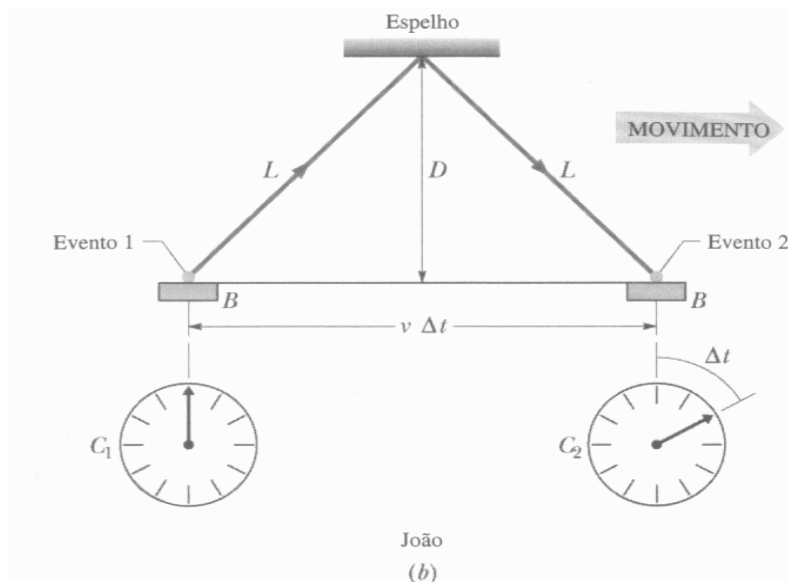


Imaginemos agora que o trem começa a andar em movimento retilíneo e uniforme. Se o observador O' repetir sua medida do tempo vai encontrar o mesmo resultado. No entanto, para o observador que se encontra fora do trem, o pulso de luz percorre um caminho diferente num certo intervalo de tempo Δt , como mostra a figura abaixo:



O caminho apresentado na figura acima equivale a:

$$2L = 2\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2},$$



e é percorrido por um pulso luminoso à velocidade da luz c . Portanto:

$$\Delta t = \frac{2}{c}\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2},$$

que tem solução

$$\Delta t = \frac{2d/c}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}$$

Ou seja:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \gamma \Delta t'.$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \geq 1$$

Perceba que, pela definição acima, temos $\Delta t' < \Delta t$, portanto $\Delta t' < \Delta t$. Mas, se $v \ll c$, temos $\Delta t' = \Delta t$, isto é, o resultado clássico, o que é esperado. A relatividade restrita sempre deve estar de acordo com a mecânica clássica no limite de baixas velocidades.

A razão física pela qual o observador em S mede um intervalo de tempo maior, é que no referencial dele a luz precisou percorrer um caminho maior, com velocidade c . Note que o observador O' mediu um intervalo de tempo entre eventos ocorrendo no mesmo lugar (pois para O' o feixe de luz sai de um ponto e, depois de atingir o espelho, retorna para o mesmo lugar). Um só relógio é necessário para medir este intervalo de tempo. Chamamos o tempo medido pelo observador que está dentro do trem de **tempo próprio**. Para o observador O , o pulso saiu de um lugar e voltou a outro após ser refletido pelo espelho. Dessa forma este observador precisou usar dois relógios sincronizados para fazer sua medida de tempo.

Vimos então que: observadores em movimento medem intervalos de tempo Δt maiores do que o intervalo de tempo próprio, $\Delta t_P \equiv \Delta t'$, medido pelo observador em repouso em relação ao fenômeno temos: $\Delta t = \gamma \Delta t_P$.

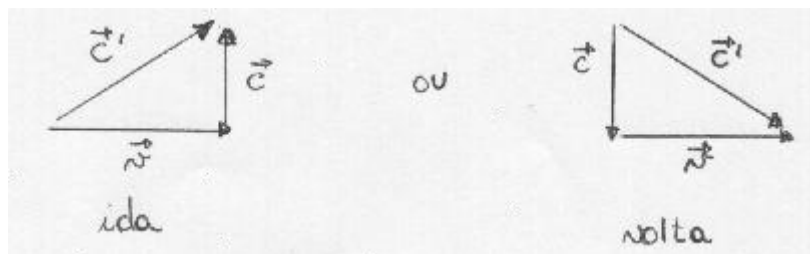
Este fenômeno é conhecido como a dilatação do tempo. Fizemos nosso raciocínio usando feixes de luz, contudo ele vale para qualquer processo físico, inclusive em reações químicas e processos biológicos.

Einstein/Lorentz (parte 4)



<http://www.youtube.com/watch?v=Ff64JNYzzTU&feature=related>

Neste ponto também é conveniente voltarmos um pouco atrás e repensar nossa experiência em termos clássicos e relativísticos. Para o observador O' dentro do trem o feixe percorre um caminho $2d$ com velocidade c , daí segue que $\Delta t' = 2d/c$. Esse resultado vale tanto classicamente quanto relativisticamente. Já para o observador em repouso fora do trem, vimos que o caminho percorrido pelo feixe de luz é maior e vale $\sqrt{d^2 + (\frac{v\Delta t}{2})^2}$. Isso também vale classicamente e relativisticamente. Classicamente, para O a velocidade da luz é $c' = \sqrt{c^2 + v^2}$



deste modo temos:

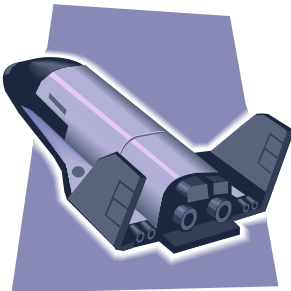
$$\Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + (\frac{v\Delta t}{2})^2}}{\sqrt{c^2 + v^2}} \rightarrow \Delta t = 2\frac{d}{c} = \Delta t',$$

isto é, O mediu o mesmo intervalo de tempo de ida e volta do feixe que O' . Relativisticamente, para O a velocidade da luz é c então, como já vimos:

$$\Delta t = \frac{2\sqrt{d^2 + \left(\frac{v\Delta t}{2}\right)^2}}{c} \rightarrow \Delta t = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta t'.$$

De novo, pode-se ver o papel crucial do 2º princípio.

Exemplo: astronautas numa nave espacial que se afasta da Terra à velocidade $v = 0,6c$, enviam um sinal à estação de controle avisando que irão descansar durante uma hora e depois retomarão o controle. Qual é o tempo do descanso, medido na Terra?



Em virtude dos astronautas iniciarem e terminarem o descanso no mesmo local, sua nave, o intervalo de tempo de 1 hora que eles medem, é um tempo próprio. O intervalo de tempo medido no referencial da Terra (usando dois relógios localizados nos pontos do espaço de ocorrência dos eventos, início e fim do descanso) é dilatado pelo fator

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,6)^2}} = 1,25.$$

Assim o tempo de descanso medido na Terra é de 1,25 horas.

Agora vamos modificar nosso enunciado. Astronautas numa nave espacial que se afasta da Terra à velocidade $v = 0,6c$, enviam um sinal à estação de controle avisando que irão descansar. A estação de controle diz que concorda e que retomará o controle daqui à uma hora. Qual é o tempo de descanso, medido na nave?

A estação de controle usa um só relógio (parado) para medir uma hora entre o início do descanso e seu fim. Assim isto é um tempo próprio. Do ponto de vista da nave, precisa-se de 2 relógios, para medir este tempo: um no ponto do espaço onde o pessoal da estação ativou seu relógio e um no ponto do espaço onde o pessoal da estação parou seu relógio (a estação está em movimento em relação à nave). Este tempo assim é dilatado pelo fator

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (0,6)^2}} = 1,25.$$

Assim o tempo de descanso medido na nave é de 1,25 hora. Este exemplo chama a atenção sobre 2 aspectos. Sempre há dilatação do tempo, não há dilatação em um caso e contração no outro. Além disso, existe uma simetria: se a estação mede um tempo maior 1,25 hora para um tempo de 1 hora medido na nave, a nave também mede um tempo de 1,25 hora para um tempo de 1 hora medido na estação.

Exemplo

Raios cósmicos, colidindo com partículas da atmosfera superior, criam, entre outras partículas, mésons π , que decaem, originando mésons μ , que também decaem, produzindo outras partículas.

O decaimento de um conjunto de partículas da mesma espécie é descrito pela expressão:

$$N = N_0 \exp [- 0,693 \Delta t / \tau]$$

onde N_0 é o número inicial de partículas, N é o número delas que não decaíram depois do intervalo de tempo Δt e τ é a meia vida, ou seja, o intervalo de tempo durante o qual metade das partículas decaem.

Para os mésons μ no referencial em que eles estão em repouso, $\tau \approx 3 \times 10^{-6}$ s.

A 5.000 m acima do nível do mar e num dado intervalo de tempo, são detectados 10^6 mésons μ com velocidade de módulo $v = 0,98 c$.

Ao nível do mar, no mesmo intervalo de tempo e com velocidade de mesmo módulo, são detectados $4,7 \times 10^5$ mésons μ .

No referencial em relação ao qual a Terra está em repouso, os 5.000 m são percorridos pelos mésons μ num intervalo de tempo dado por $\Delta t = d / v$, ou seja:

$$\Delta t \approx 5.000 \text{ m} / 0,98 (3 \times 10^8 \text{ m/s}) \approx 1,7 \times 10^{-5} \text{ s}$$

No referencial de repouso dos mésons μ , ao qual a meia vida dada acima se refere, o correspondente intervalo de tempo é $\Delta t_0 = \Delta t / \gamma$, ou seja:

$$\Delta t_0 \approx 1,7 \times 10^{-5} \text{ s} [1 - (0,98)^2]^{1/2} \approx 3,38 \times 10^{-6} \text{ s}$$

Com esse valor de Δt_0 , com $N_0 = 10^6$ e com o valor de τ dado acima, a expressão matemática do decaimento fornece:

$$N \approx 10^6 \exp [- 0,693 (3,38 \times 10^{-6} \text{ s}) / 3 \times 10^{-6} \text{ s}] \\ \approx 4,58 \times 10^5$$

Esse resultado concorda com o valor $4,7 \times 10^5$ dado acima para o número de mésons μ detectados ao nível do mar.

Caso o valor $\Delta t \approx 1,7 \times 10^{-5}$ s fosse usado, o resultado seria $N \approx 1,97 \times 10^4$ (muito diferente do valor detectado).

Animações úteis para visualizar a dilatação do tempo e o conceito de simultaneidade

- Dilatação
http://www.walter-fendt.de/ph14br/timedilation_br.htm
Olhar a animação e verifique que para uma distância de 5 horas luz e uma velocidade $v = 0,8c$, o tempo de vôo medido na Terra é 6,65 horas e na nave é de 3,75 horas.
- Simultaneidade
http://titan.physx.u-szeged.hu/physics/theophys/specrel/texte/Simultaneity_text.html
Esta página apresenta outro exemplo de eventos que são simultâneos num referencial mas, não em outro.

1) Clicar sobre o desenho para selecionar a imagem.

2) Clicar sobre o terceiro botão de baixo, para aparecer 'Earth' no lugar de 'Plane'. Isso significa que estamos no referencial de repouso do avião e a Terra estará em movimento.

3) Clicar em 'play'. Uma onda esférica é emitida quando o avião passa sobre uma torre no água, a meia distância de 2 antenas. Em relação ao avião, as 2 frentes representadas são simétricas pois foram emitidas juntas. Por outro lado, a antena da direita recebe a frente viajando para direita primeiro e a antena da esquerda recebe a outra frente depois. Assim para um observador sobre a Terra, as 2 frentes não são emitidas simultaneamente.

Série Cosmos – Episódio 8 → http://www.youtube.com/watch?v=c_bKY-CGW9k

Bibliografia

MOURÃO, Ronaldo R. de Freitas. *Explicando a Teoria da Relatividade*, Editora Tecnoprint S.A., 1987.

BAGNATO, Vanderlei S. (Assistência de Luiz G. Marcassa). *Introdução à Relatividade Especial* A.P. French, Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series

Moises, Curso de Física Básica, vol.4, Ed. Blucher.

Tipler, Física Moderna. Ed. LTC

Capítulo 3: Confirmação Experimental da Dilatação do tempo

Uma das perguntas naturais a se fazer a respeito da dilatação do tempo é se ela é real ou aparente. Em particular se S' está em movimento em relação a S , o observador S irá dizer que o tempo em um relógio fixo em S' é dilatado. Mas a situação é simétrica: S' deve achar dilatado o tempo de um relógio fixo em S . Esta questão de "simetria" é a raiz do famoso paradoxo dos gêmeos. Precisamos pensar neste problema antes de discutir confirmações experimentais da dilatação do tempo.

Paradoxo dos gêmeos

Homero e Ulisses são gêmeos idênticos. Ulisses viaja a alta velocidade até um planeta além do sistema solar e retorna, enquanto Homero fica na Terra. Quando os dois se reúnem, qual é o mais velho? Ou ambos tem a mesma idade?

A resposta certa é que Homero, o gêmeo mais sedentário, será mais velho. O problema é um paradoxo em virtude do papel, aparentemente simétrico jogado pelos gêmeos na questão, e do resultado assimétrico pertinente ao envelhecimento de um deles. O paradoxo se resolve quando se observa a assimetria dos papéis dos gêmeos. Precisamente, enquanto Homero permanece na Terra num único referencial inercial o movimento de Ulisses é acelerado: de zero à velocidade \vec{v} no início, de \vec{v} à $-\vec{v}$ na meia-volta e de $-\vec{v}$ à zero no fim.

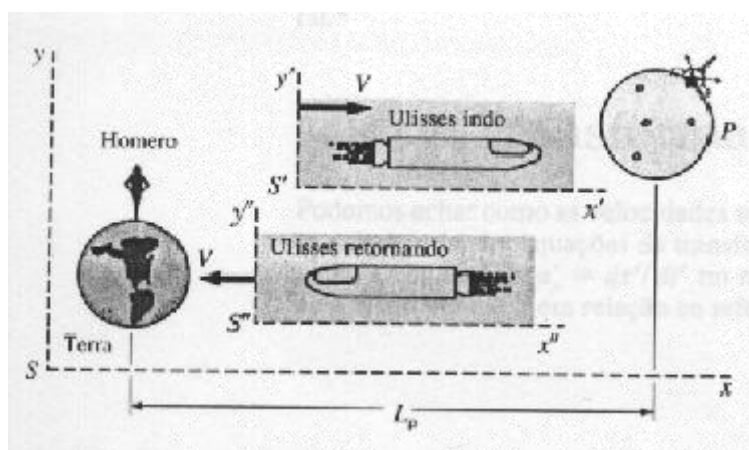


Figura3.1: O paradoxo dos gêmeos

Para fixar as idéias, vamos supor $v = 0,8c$ e que a distância percorrida medida por Homero é $L_P = 8$ anos-luz (1 ano-luz = distância percorrida pela luz em 1 ano = 1 ano $\times c$).

Temos assim

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{5}{3}$$

É fácil analisar o problema do ponto de vista de Homero, na Terra. De acordo com o relógio de Homero, Ulisses viaja na ida (ver figura acima) durante um intervalo de tempo $L_p/v = 10$ anos e na volta durante um intervalo de tempo igual. Então Homero é 20 anos mais velho, quando Ulisses retorna.

No referencial S' , ligado ao foguete na ida, o intervalo de tempo entre o instante da partida de Ulisses da Terra e o instante de sua chegada no planeta P, é menor em virtude de ser o intervalo de tempo próprio.

O tempo que Ulisses leva para chegar ao planeta, pelo relógio dele é:

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{10 \text{anos}}{5/3} = 6 \text{anos}$$

Uma vez que o tempo da viagem de retorno é o mesmo, Ulisses terá registrado 12 anos para a viagem de ida e volta e será 8 anos mais jovem que Homero ao chegar a Terra.

O caso dos gêmeos descrito acima não é muito realista pela velocidade envolvida. O caso que será descrito agora é parecido ao dos gêmeos, mas é uma experiência real.

Relógios em aviões

Vocês podem ler por exemplo dois artigos de J. C. Hafele e R. Keating em *Science* 177 (1972) p.166 e p.168. Outras experiências mais precisas do mesmo tipo foram realizadas depois.

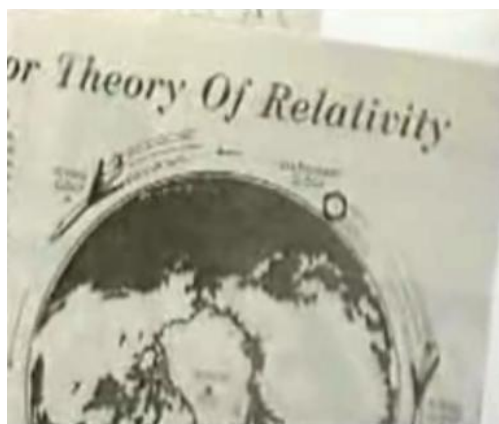


Fig3.2 - Experiência de Hafele e Keating

A experiência de Hafele e Keating foi a seguinte.

Em outubro de 1971, quatro relógios atômicos foram colocados a bordo de aviões de linha, voando ao redor da Terra uma vez para leste e outra para oeste. Neste caso, precisa-se levar em conta, além da dilatação do tempo da relatividade restrita, a rotação da Terra, o campo gravitacional terrestre menor nos aviões do que na superfície da Terra, etc. Levando isto em conta, as previsões estão mostradas na figura de Hafele e Keating.

O que foi observado foi uma perda $\tau - \tau_0$ de $\sim 59ns$ indo para leste e um ganho de $\sim 273ns$ indo para oeste onde τ é o tempo medido no avião e τ_0 é o tempo medido em um relógio do referencial terrestre.

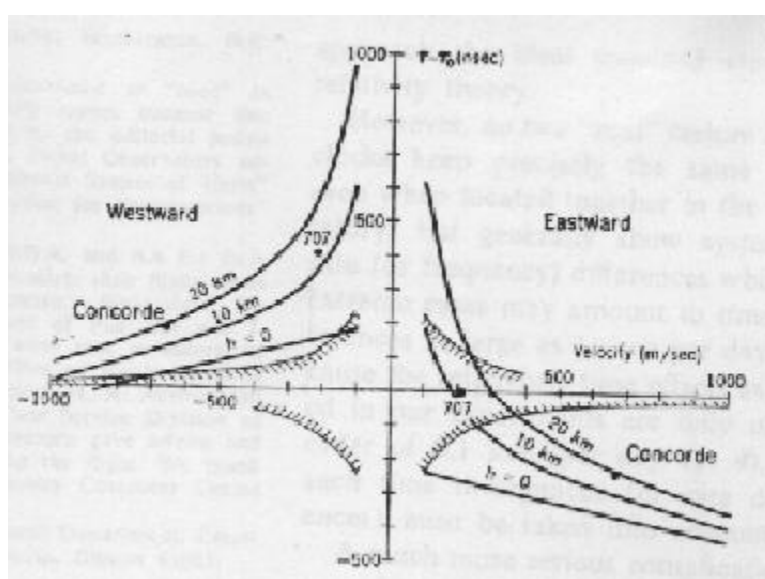


Figura3.3: Gráfico das velocidades dos aviões

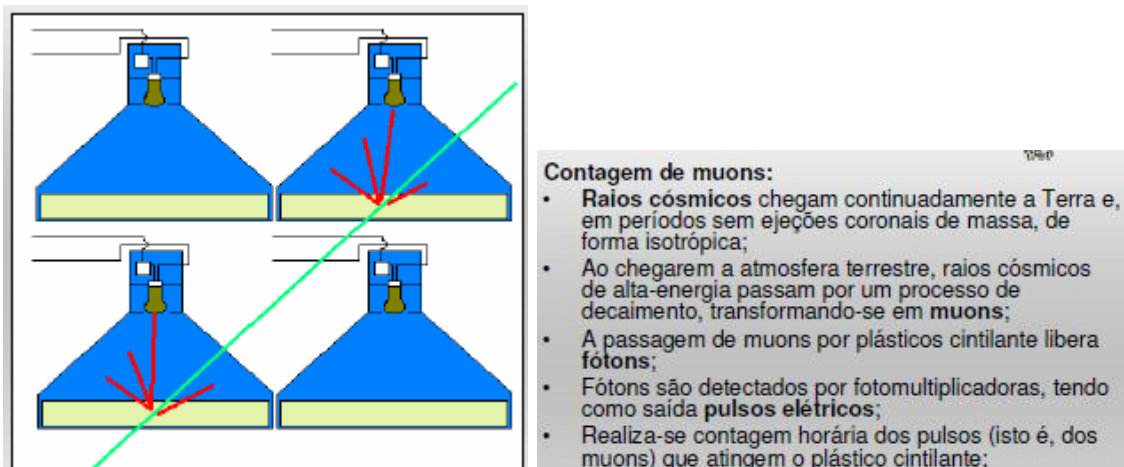
Supondo uma altitude de 10 km e velocidade média de $\sim 900\text{km/h} = 250\text{m/s}$, lemos 2 pontos no gráfico de previsões, para o voo a leste e oeste, respectivamente. Eles concordam aproximadamente com os resultados experimentais enunciados acima. Em uma análise mais precisa precisamos levar em conta a variação da altitude, da velocidade do avião, etc.

Ver vídeo - <http://www.youtube.com/watch?v=cmPebZA2ZdI>

Dcaimento de múons cósmicos

O exemplo anterior é muito citado nos livros de relatividade restrita, mas ele é um pouco complicado, pois há vários efeitos a se levar em conta. Um exemplo "mais limpo" da dilatação do tempo está relacionado aos múons que se formam no alto da atmosfera a partir dos raios cósmicos e vão em direção à superfície da Terra com alta velocidade. Se não fosse pela dilatação do tempo, deveríamos observá-los em menor número na superfície da Terra, pois seu tempo de vida é muito curto.

Uma experiência envolvendo tais múons pode ser vista no vídeo 33 ``A dilatação do tempo''. Pode-se também ler o relato dos seus autores, Frisch e Smith, em *American Journal of Physics* 31 (1963) p.342. O livro de French "*Special Relativity*" p.97 a 104 também discute este filme.



1. Múons são detectados no topo do Mont Washington. Eles podem ter várias energias, alguns são tão lentos (velocidade média $0,9952c$) que estão parados num cintilador de plástico. São estes múons que são observados. Os múons decaem de modo preferencial, em um elétron e dois neutrinos. O múon e o elétron ao passar pelo cintilador emitem luz, detectada por uma foto-multiplicadora, que ativa um osciloscópio. Queremos saber o número desses múons detectados e seus tempos de vida.

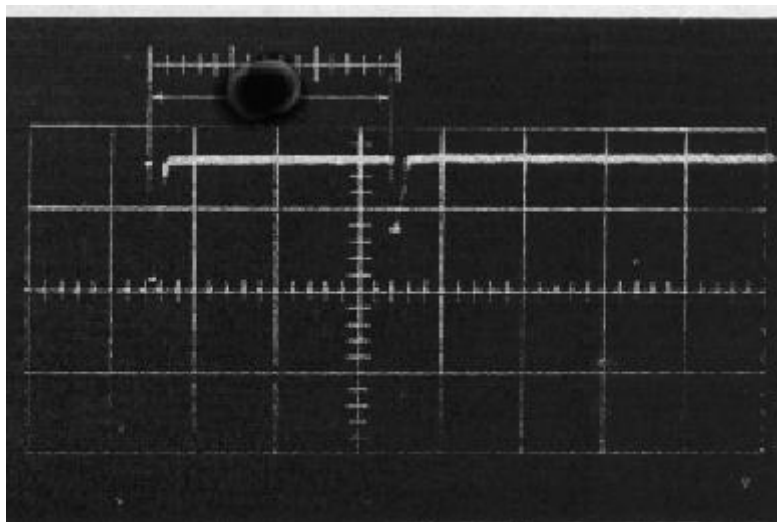


Figura3.4: Detecção do múon registrada pelo osciloscópio

- Na figura, a marca da esquerda é de um múon e a da direita do seu elétron de decaimento. Sabendo que uma divisão horizontal grande do osciloscópio corresponde a $1\mu s$, qual é o tempo de vida do múon em questão?
- Como o tempo de vida altera-se de múon para múon, precisamos acumular muitos dados para extrair um tempo de vida médio. Tais dados são apresentados nas duas figuras seguintes. Para entender o que é tempo de vida médio, vamos usar a figura que nos fornece o número de múons em

função do tempo, $N(t)$, e que é extraída da outra. Vemos os dados com barra de erro e uma curva pontilhada para os ajustes. Esta curva é do tipo $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$ (típico para decaimentos).

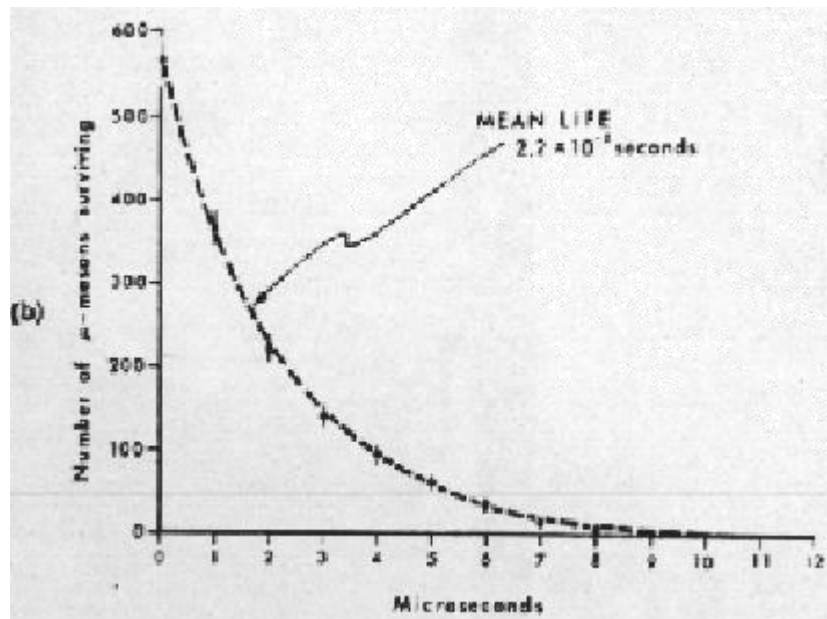


Figura3.5: Curva de decaimento

Assim vemos que $N(t=0) = N_0$. Qual é então o valor de N_0 ? O que representa isto fisicamente? Vemos também que $N(\tau) = N_0/e \sim N_0/2,7$. De modo que τ é o tempo após o qual o número inicial de múons decresceu de 2,7 devido aos decaimentos. É este τ que é chamado de tempo de vida médio. Qual é então o valor de τ ?

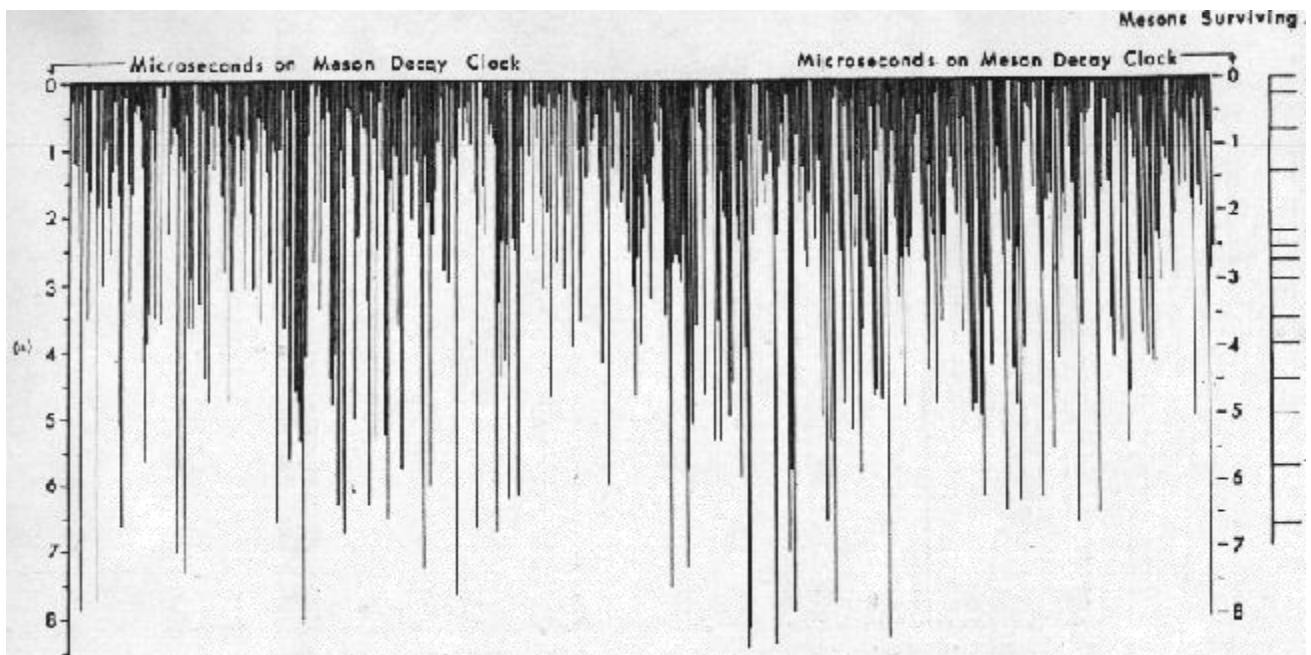


Figura 3.6: Gráfico dos múons detectados

2. A experiência é refeita, a altitude menor, em Cambridge. A diferença de altitude em relação ao Mont Washington é de 1907m.

a) Calcular o tempo de viagem t_{viagem} que os múons levam para percorrer estes 1907m. Usando uma das últimas figuras, conclua quantos muons devem ser detectados em Cambridge (conta clássica).

b) Experimentalmente, foram encontrados muito mais múons: 412. Isto pode ser entendido usando a dilatação do tempo. Na fórmula $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$, τ é o tempo de decaimento de um múon em repouso. Assim, devemos usar para t , o tempo no referencial de repouso do múon deste múon. O tempo de viagem, t_{viagem} , foi calculado no referencial terrestre. No referencial de repouso do múon este tempo, t_v , é menor. Calcular $t_v = t_{\text{viagem}}/\gamma$ e $N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$ e comparar com 412.

c) Na pergunta anterior, todos os tempos foram considerados ~~no~~ no referencial de repouso do múon. Vamos refazer estas contas no referencial terrestre. Calcular t_v , o tempo de vida médio dos múons para este referencial e $N(t_{\text{viagem}}) = N_0 \cdot e^{-t_{\text{viagem}}/\tau}$. Comparar com item 2b) e tirar uma conclusão. Hoje em dia, este efeito de dilatação do tempo é muito usado em aceleradores de partículas: no referencial do acelerador, uma partícula vive mais tempo antes de decair, assim seu estudo fica mais fácil. Pode-se por exemplo ver a seguinte página:

www-ed.fnal.gov/data/physci/relativity/student/challbegin1.shtml

Esse site funciona com Windows.

Quando você calcula a distancia percorrida pela partícula com $d = v \times \tau$, como pedido na página, a conta é clássica. Experimente introduzir o valor de d calculado com $d = v \times \gamma \tau$ (isto incorpora a dilatação do tempo). Você vera um melhor acordo com os dados e as simulações quando v aproxima-se de c .

Bibliografia

MOURÃO, Ronaldo R. de Freitas. *Explicando a Teoria da Relatividade*, Editora Tecnoprint S.A., 1987.

BAGNATO, Vanderlei S. (Assistência de Luiz G. Marcassa). *Introdução à Relatividade Especial* A.P. French, Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series

Moises, Curso de Física Básica, vol.4, Ed. Blucher.

Tipler, Física Moderna. Ed. LTC

Capítulo 4: O Espaço na Relatividade

Contração do espaço

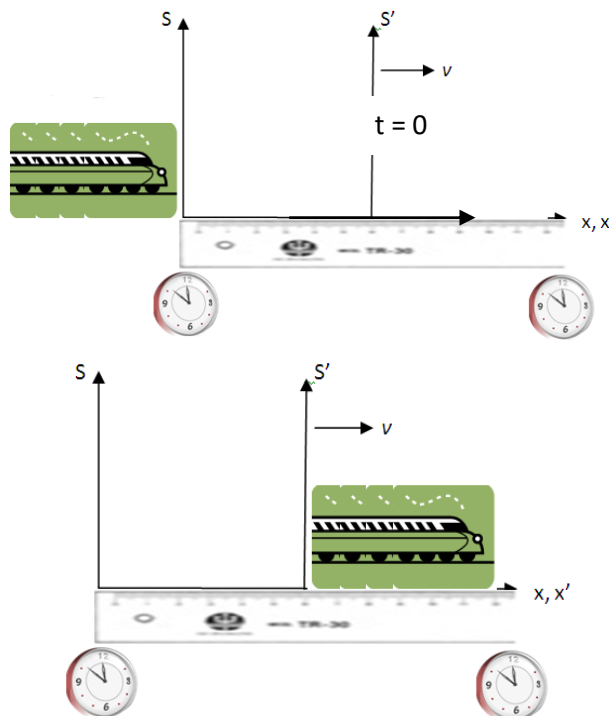
Já vimos que a noção de tempo ou intervalo de tempo não é a absoluta, ou seja, depende do referencial. Da mesma maneira a distância vai depender do referencial.

Definimos o **tempo próprio** como o tempo entre eventos medidos por **um único relógio em repouso** em relação aos eventos. Da mesma maneira, o **comprimento próprio** é o comprimento de um objeto medido num referencial onde este objeto está em **repouso**.

Voltemos ao trem de comprimento próprio l . O observador O em S sobre a plataforma coloca uma régua paralela à velocidade do trem e anota os instantes de tempo quando o observador O' em S' passa pelas extremidades da régua (alguém pode o ajudar), daí a velocidade do trem em relação à plataforma é:

$$v_{t/p} = \frac{l}{t}$$

onde l é o comprimento (próprio) da régua.



O observador O' em S' dentro do trem anota os instantes de tempo quando ele passa pelas extremidades da régua e obtém 0 e t' (tempo próprio). Esse observador chama de l' o comprimento da régua, daí a velocidade da plataforma em relação ao trem é:

$$v_{p/t} = \frac{l'}{t'}$$

onde l' é o comprimento da régua em movimento. Como $v_{t/p} = v_{p/t}$, temos

$$\frac{l}{t} = \frac{l'}{t'}.$$

Classicamente, $t' = t$ daí segue que $l = l'$, ou seja, os observadores concordam que a régua tem

$$t = t' / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

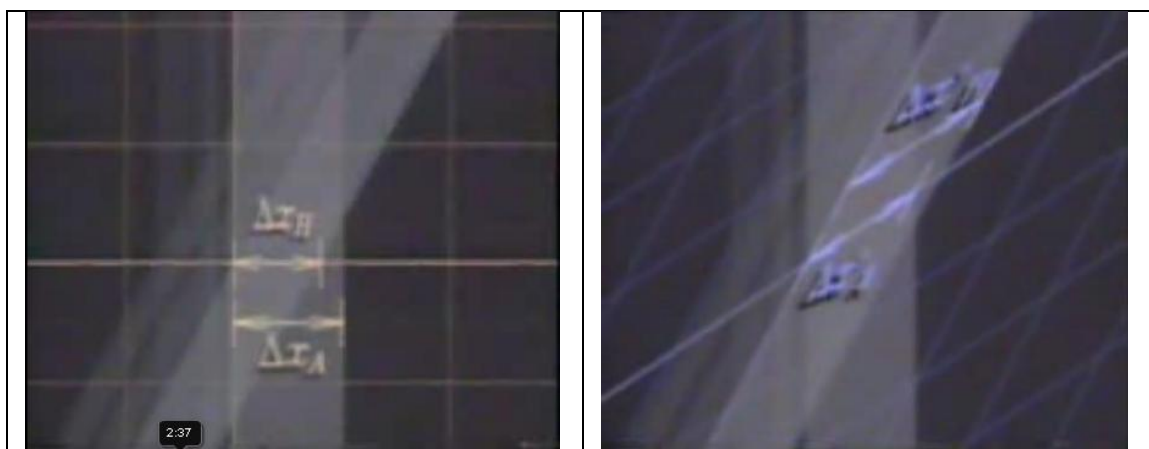
o mesmo comprimento. Relativisticamente t' é o tempo próprio, daí

$$l' = l \frac{t'}{t} = l \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{l}{\gamma} \leq l.$$

Importante:

Vimos então que: para um observador, um objeto em movimento é menor (na direção do movimento) do que o mesmo objeto parado: $l' = l/\gamma$, sendo l o comprimento próprio medido no referencial de repouso do objeto. Isto se chama contração do espaço e é um fenômeno complementar à dilatação do tempo (a usamos para chegar nesse resultado).

Ver o vídeo: <http://www.youtube.com/watch?v=Ff64JNYzzTU&feature=related>



Vejamos uma demonstração um pouco diferente usando uma medida de comprimento cinemática. Tomemos de novo o nosso trem relativístico de comprimento l e meçamos o seu

comprimento do seguinte modo. Coloquemos um observador no início do trem com um cronômetro e uma lanterna e um espelho fixo no nariz do trem. O observador O' fixo no trem emite um raio de luz em direção ao espelho (nariz do trem) e mede o tempo $\Delta t'$ que este leva para ir e voltar até ele. Então, temos:

$$\Delta t' = 2l'/c \rightarrow l' = c \cdot \Delta t' / 2$$

Que é o comprimento próprio medido no referencial em movimento S'.

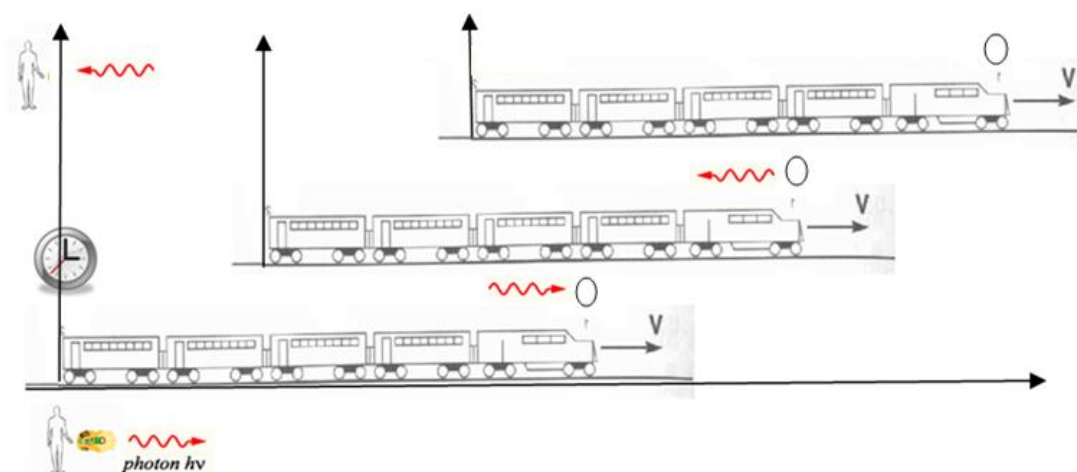
Do ponto de vista do observador O fixo no RI S temos:

Ida: $d = l + u \cdot \Delta t_1$ mas $d = c \cdot \Delta t_1$

Volta: $d = l - u \cdot \Delta t_2$ mas $d = c \cdot \Delta t_2$

Eliminando d

$$\Delta t_1 = l / (c - u) \text{ e } \Delta t_2 = l / (c + u)$$



$$\text{Logo, } \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \frac{2lc}{c^2 - u^2} = \frac{2l}{c(1 - u^2 / c^2)}$$

Usando que

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}}$$

Temos

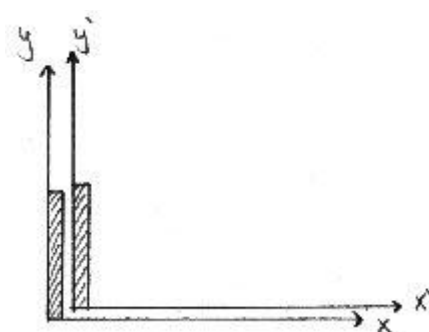
$$l = l' \sqrt{1 - u^2 / c^2} = l' / \gamma \rightarrow \text{Contração do Comprimento}$$

onde l' é o comprimento próprio.

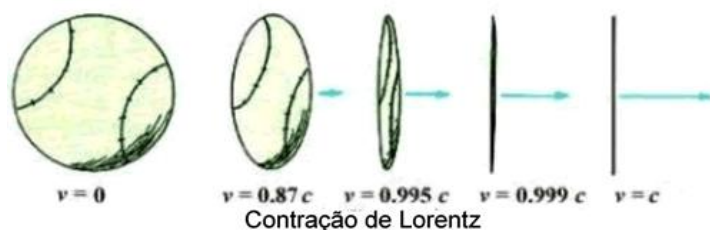
Ver vídeos: Einstein/Lorentz (parte4) <http://www.youtube.com/watch?v=Ff64JNYzzTU&feature=related>



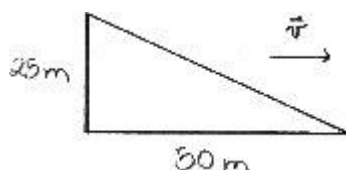
Na ‘experiência’ anterior, medimos o comprimento de uma régua posicionada paralelamente a \vec{v} , ou seja, a direção do movimento de S' . O que ocorre se a régua estiver numa posição perpendicular a \vec{v} ? Supomos que ambos os observadores colocam uma régua vertical como mostra a figura abaixo.



Queremos saber se quando as origens de S e S' coincidem, as extremidades superiores das régua coincidem. Notemos que a situação é perfeitamente simétrica: os dois observadores tem uma régua vertical de comprimento l_p e se movem com velocidade v . Ao se cruzarem, as régua vão deixar uma marca uma sobre a outra. Se as marcas coincidirem significa que as régua têm o mesmo comprimento. Se não, existe um referencial onde a régua é menor e ambos os observadores concordam com isso. Este referencial seria privilegiado, em contradição com o primeiro princípio da relatividade. Assim, ambos os observadores (S e S') medem o mesmo comprimento: **não há contração do espaço em direção perpendicular ao movimento.**



Exemplo: Uma nave espacial tem a forma de um triângulo e voa a $0,95c$. Quando em repouso suas dimensões são como mostra a figura abaixo.



Qual a aparência da nave quando ela estiver voando? Reposta: Sua base será achatada

$$l = \sqrt{1 - v^2/c^2} \times 50 \text{ m} = 15,6 \text{ m}.$$

Na realidade, a forma como nos veremos a nave depende de um outro fator além da dilatação do espaço. Este fator se deve ao efeito de que, para chegar ao nosso olho no mesmo instante, os raios de luz provenientes de vários pontos do objeto devem ser emitidos em instantes diferentes, isto introduz outra distorção. Para uma discussão disto pode-se ler as páginas 150-152 de "Special Relativity" de French. Você também pode ler a seção 6.5a do volume 4 do "Curso de Física Básica" do Nussenzveig. A figura abaixo é outro exemplo encontrado no site www.anu.edu.au/Physics/Searle/. A imagem da esquerda é de um trem parado, a do meio mostra a imagem do trem distorcido pela contração do espaço e o efeito dos raios luminosos ("à la Terrell") e a da direita é como a do meio mas com inclusão do efeito Doppler que afeta as cores e que veremos daqui à pouco.



Medida e Aparência Visual

Um observador, em repouso num dado referencial, fotografa uma régua. Pela fotografia, ele calcula as coordenadas de posição das duas extremidades da régua e, destas coordenadas, calcula o comprimento da régua.

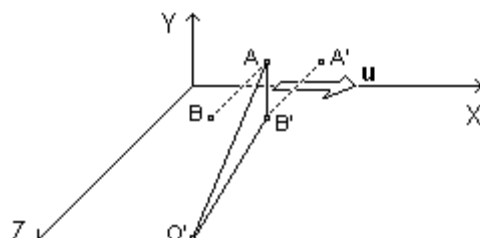
A imagem da régua é formada no filme fotográfico pelos raios que chegam no mesmo instante. O módulo da velocidade de propagação da luz é finito.

Então, os raios que formam as imagens das extremidades da régua no filme fotográfico, aquele que vem da extremidade mais distante e aquele que vem da extremidade mais próxima, foram emitidos em instantes diferentes.

A contração de Lorentz é deduzida com a exigência de que as posições das

extremidades da régua sejam determinadas no mesmo instante. Essa exigência configura o ato de medir.

Portanto, no contexto da teoria da relatividade especial, o que se mede é diferente do que se fotografa (ou vê).



Por outro lado, se a régua se desloca com velocidade u ao longo de eixo X do referencial considerado, sempre paralela ao eixo Z , e é observada em O' , o raio proveniente da extremidade B' deve ter partido com a régua na posição indicada por A' e B' e o raio proveniente da extremidade A deve ter partido um pouco antes, com a régua na posição indicada por A e B .

A imagem formada na retina do observador em O' corresponde a uma régua com extremidades em A e B' . Assim, a régua aparece girada.

De modo geral, objetos em movimento relativo ao observador com velocidades de grandes módulos são vistos menores na direção do movimento e levemente girados.

Limite não relativístico das expressões da dilatação do tempo e contração do espaço

$$1/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Nestas expressões, aparecem os fatores $v \ll c$. Se $v \ll c$, podemos fazer as expansões:

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \dots$$

Para obter estes resultados usamos:

$$(1 + x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha - 1)}{2!} x^2 + \dots$$

Onde $x \ll 1$. (Isto pode ser provado através de uma expansão em série de Taylor.)

Assim, quando $v \ll c$, poderemos desprezar os termos em v^2/c^2 e termos de ordem mais elevadas, obtendo:

$$\Delta t = \gamma \Delta t_p \rightarrow \Delta t = \Delta t_p$$

$$l = \frac{l_p}{\gamma} \rightarrow l = l_p$$

ou seja, nesse limite não existe dilatação do espaço e contração do tempo, conforme esperávamos.

$$1/\gamma = \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

Para se ter uma idéia mais concreta, montamos uma tabela do parâmetro γ para

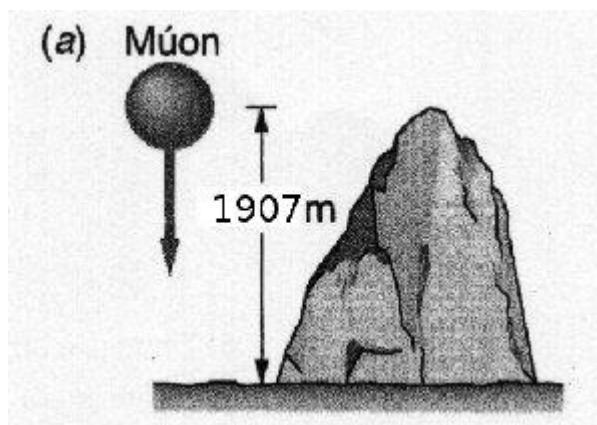
$$c = 3 \times 10^8$$

vários valores de v (lembrando que c em m/s).

v	v/c	$1/\gamma$
300 km/h	$2,8 \times 10^{-7}$	$0,999999999999996 \sim 1$
$0,1c$	0,1	0,995
$0,98c$	0,98	0,2

A contração do espaço evidenciada pelos múons de origem cósmica

Já vimos que a abundância de múons de origem cósmica, no nível do mar, pode ser entendida em termos da dilatação do tempo de vida para um observador terrestre.



$$\tau = 2,2\mu s$$

Se o tempo de vida do múon fosse válido no referencial do observador terrestre, não deveriam chegar múons até o nível do mar (apenas poucos deles). Mas na verdade esse valor de τ é válido para o referencial de repouso do múon. Para o referencial do observador terrestre temos

$$t_{\text{vida}} = \frac{\tau}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{2,2 \times 10^{-6} s}{\sqrt{1 - 0,9952^2}} = 22,5\mu s.$$

Por outro lado, o tempo para percorrer 1907m no referencial do observador terrestre é

$$t_{\text{viagem}} = 1907m/0,9952c = 6,4\mu s$$

. Assim podemos entender porque chegam muitos múons até o mar, pois

$$t_{\text{vida}} = 22,5\mu s > t_{\text{viagem}} = 6,4\mu s.$$

(No lugar de fazer a comparação dos tempos no referencial terrestre, podemos fazê-lo no referencial

de repouso do múon. Isto não deve afetar a conclusão. Neste caso o tempo de vida é $\tau = 2,2\mu s$.

Precisamos calcular o tempo de viagem no referencial de repouso do múon; é o tempo próprio:

$$t_v = t_{\text{viagem}}/\gamma = 0,6\mu s$$

. Verificamos que de fato $\tau > t_v$.)

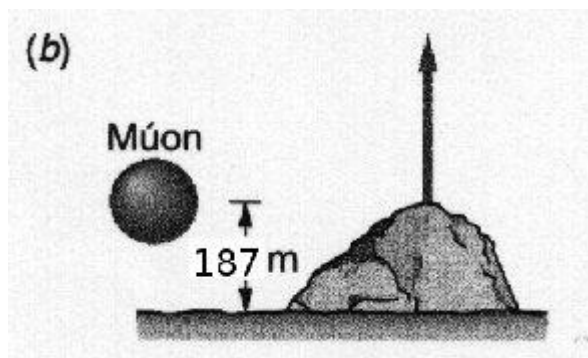
Este problema pode também ser entendido em termos da contração dos comprimentos no lugar da dilatação do tempo. No referencial do múon: a distância entre o Mt. Washington e o mar aparece contraída, agora ela vale

$$d_{\text{viagem}} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \times 1.907m = 187m.$$

Por outro lado, no referencial de repouso do múon, a distância percorrida durante a vida do múon é

$$d_{\text{vida}} = v\tau = 0,9952 \times 3.10^8 \times 2,2.10^{-6} = 656m.$$

Podemos ver que realmente $d_{\text{vida}} > d_{\text{viagem}}$, ou seja, muitos dos múons conseguem percorrer a distância do alto do Mt. Washington até o mar antes de se desintegrarem.



Na equação anterior, comparamos as distâncias no referencial de repouso do múon. Podemos também fazer a comparação no referencial de um observador terrestre. Nesse caso, a distância a percorrer do alto do monte Washington ao mar é de $l_{\text{viagem}} = 1907m$. A distância percorrida durante a vida do múon é sua velocidade multiplicada pelo seu tempo de vida no referencial terrestre, isto é,

$$l_{\text{vida}} = v \times \gamma \tau = 0.9952 \times 10^8 (m/s) \cdot \frac{2,2 \times 10^{-6} (s)}{\sqrt{1 - (0,9952)^2}} = 6712m .$$

Como $l_{\text{vida}} > l_{\text{viagem}}$, muitos múons conseguem percorrer a distância do alto do monte Washington ao mar sem decair em outras partículas.

Link interessante:

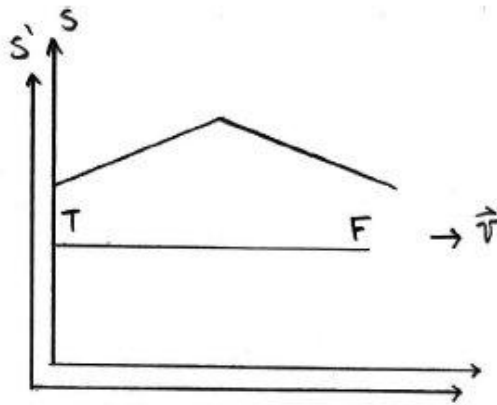
Nessa página: www.upscale.utoronto.ca/GeneralInterest/Harrison/SpecRel/Flash/Simultaneity.html

mostra-se como a partir da contração dos comprimentos pode-se ter eventos simultâneos em um referencial e não em outros.

O paradoxo da vara e do telhado



Este paradoxo muito conhecido é útil para verificarmos a assimilação de conceitos tais como a contração do espaço, a não simultaneidade e as transformações de Lorentz.



Um homem carregando uma vara de 20m passa correndo por baixo de uma área coberta de telhas, de 11m de comprimento. A velocidade do homem é $v = \sqrt{3}c/2$

(este valor é só para ilustrar o paradoxo!).

- [a)] No referencial S do telhado, qual é o comprimento da vara? Ela cabe debaixo do telhado? No referencial do telhado, a vara está em movimento e parece contraída, ela mede

$$l_v = 20m/\gamma = 20m/2 = 10m ,$$

como isso é menor que os 11m do telhado, a vara cabe debaixo do telhado.

- [b)] No referencial S' da vara, qual é o comprimento do telhado? Verificar que a vara agora é maior que o telhado, em aparente contradição com o que foi achado no item a)

$$l_t = 11m/\gamma = 9,5m$$

Agora a vara mede 20m e o telhado é contraído. Ele mede . Vemos que agora a vara não cabe embaixo do telhado.

- [c)] Queremos resolver esse paradoxo! A vara fica embaixo do telhado, significa que ambas as extremidades, F na parte da frente e T na parte de trás, estão simultaneamente sob o telhado. Mas sabemos que a simultaneidade de dois eventos depende do referencial, não há realmente um paradoxo entre os resultados de a) e b). Vamos verificar isso com cálculos.

Chamemos $t=t'=0$ o instante que a extremidade T da vara entra embaixo do telhado e onde as origens dos referenciais S e S' são supostas coincidir.

i) No referencial S:

quais são os valores de x_F e x_T para $t = t_F = t_T = 0$?

$$x_T = 0 \quad x_F = 10m$$

quais são os valores de $\Delta x = x_F - x_T$ e $\Delta t = t_F - t_T$ correspondentes?

$$\Delta t = 0 \text{ e } \Delta x = 10m$$

ii) No referencial S':

Use as transformações de Lorentz para calcular $\Delta x'$ e $\Delta t'$. Compare e comente os resultados obtidos em S e S'.

$$\Delta t' = \gamma \left(\Delta t - \frac{v \Delta x}{c^2} \right) = -\frac{10\sqrt{3}}{c} \text{segundos}$$

$$\Delta x' = \gamma (\Delta x - v \Delta t) = 20 \text{ metros (em acordo com o item b))}$$

Vemos que, enquanto no referencial S, as extremidades da vara ficam debaixo do telhado

simultaneamente $(\Delta t = 0)$, no referencial S', elas não o fazem $(\Delta t' \neq 0)$

Bibliografia

MOURÃO, Ronaldo R. de Freitas. *Explicando a Teoria da Relatividade*, Editora Tecnoprint S.A., 1987.

BAGNATO, Vanderlei S. (Assistência de Luiz G. Marcassa). *Introdução à Relatividade Especial*

A.P. French, Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series

Moises, Curso de Física Básica, vol.4, Ed. Blucher.

Tipler, Física Moderna. Ed. LTC

Cap5 - Adição Relativística de Velocidades

Na mecânica clássica, se um trem se movimenta com velocidade \vec{v} em relação à plataforma e um passageiro se movimenta com velocidade \vec{u}' em relação ao trem, a velocidade do passageiro em relação à plataforma é $\vec{u} = \vec{v} + \vec{u}'$. Isto pode ser derivado a partir das transformações de Galileu, como vimos no cap 1.

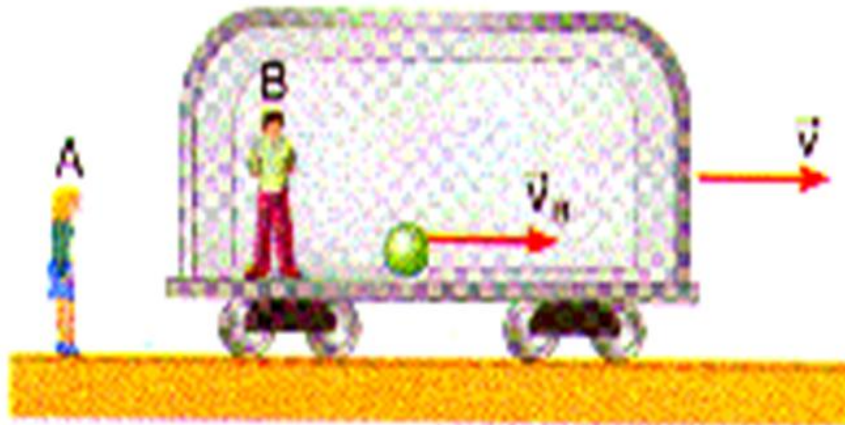
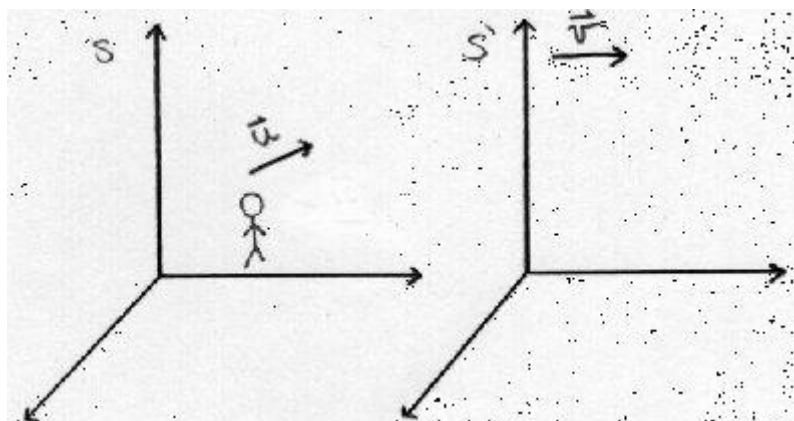


Fig5.1 – Adição clássica de velocidades - $\mathbf{V_A = V_B + v}$

Da mesma maneira usaremos as transformações de Lorentz para derivar a fórmula de "adição" relativística de velocidades. Chamemos \vec{v} a velocidade de S' em relação a S e \vec{u} a velocidade do passageiro em S . A velocidade \vec{v} é paralela ao eixo Ox .



Queremos calcular \vec{u}' , a velocidade do passageiro em relação a S' . Usando as transformações de Lorentz temos:

$$\begin{aligned}
dx' &= \gamma (dx - v dt) \\
dy' &= dy \\
dz' &= dz \\
dt' &= \gamma \left(dt - \frac{v dx}{c^2} \right)
\end{aligned}$$

e, portanto, para a componente u'_x do vetor \vec{u}' , temos:

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{dx'}{dt'} \\
&= \frac{\gamma (dx - v dt)}{\gamma (dt - v dx/c^2)} \\
&= \frac{dx/dt - v}{1 - (v/c^2)(dx/dt)} \\
&= \frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2}
\end{aligned}$$

e para u'_y :

$$\begin{aligned}
u'_y &= \frac{dy'}{dt'} \\
&= \frac{dy}{\gamma (dt - v dx/c^2)} \\
&= \frac{dy/dt}{\gamma (1 - (v/c^2)(dx/dt))} \\
&= \frac{u_y}{\gamma (1 - v u_x/c^2)}
\end{aligned}$$

e, analogamente, para u'_z :

$$u'_z = \frac{u_z}{\gamma (1 - v u_x/c^2)}$$

Esses resultados podem ser escritos como:

$$\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - v u_x/c^2} \\
u'_y &= \frac{u_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v u_x/c^2} \\
u'_z &= \frac{u_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - v u_x/c^2}
\end{aligned}$$

Observemos que: 1º) a transformação inversa para a velocidade é:

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2} \\u_y &= \frac{u'_y \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2} \\u_z &= \frac{u'_z \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}\end{aligned}$$

2º) O limite de baixas velocidades $v \ll c$ é, usando que

$$(1 + z)^\alpha = 1 + \alpha z + \alpha(\alpha - 1) \frac{z^2}{2} + \mathcal{O}(z^3),$$

$$\begin{aligned}u'_x &= (u_x - v) \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \approx u_x - v \\u'_y &= u_y \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \approx u_y \\u'_z &= u_z \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) \left(1 + \frac{vu_x}{c^2}\right) \approx u_z\end{aligned}$$

ou seja, reencontramos a fórmula de adição de velocidades não-relativística.

3º) Se o objeto ou pessoa com velocidade \vec{u} for um pulso de luz e $\vec{u} \parallel OX$ (verifique o caso \vec{u} geral sozinho), temos $u_x = c$, $u_y = u_z = 0$. Colocando isso nas fórmulas de adição de velocidades obtemos:

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{c - v}{1 - vc/c^2} = c \\u'_y &= u'_z = 0\end{aligned}$$

em acordo com o 2º princípio da relatividade.

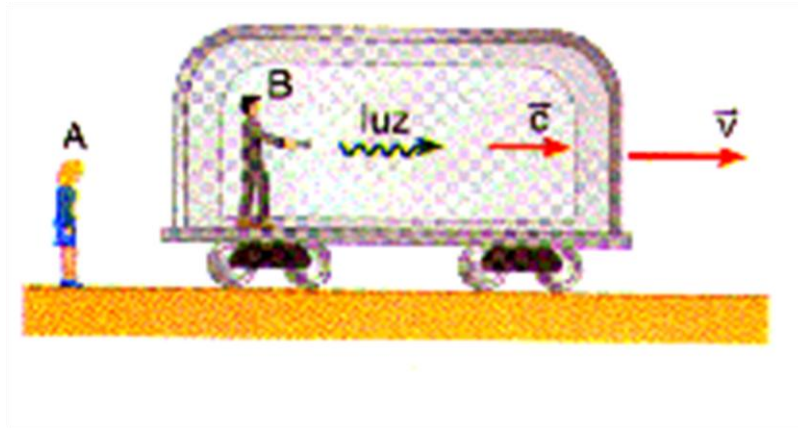
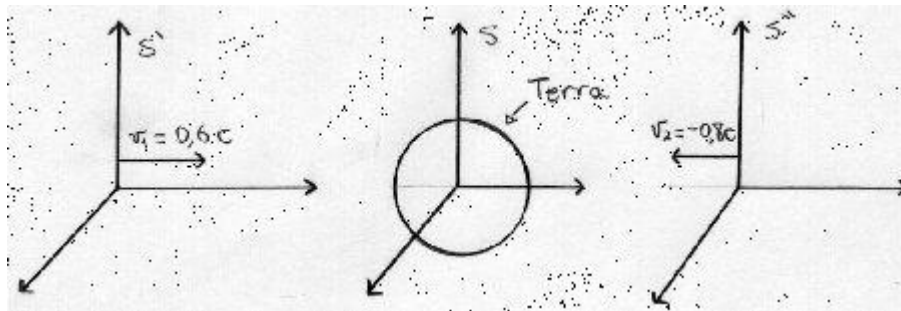


Fig5.2 – Adição relativística de velocidades

Exemplos:

Suponha que dois prótons se aproximam da Terra vindo de direções opostas. As velocidades dos prótons medidas no referencial da Terra são $v_1 = 0,6c$ e $v_2 = -0,8c$. Qual é a velocidade relativa entre os prótons?

Solução: escolhamos os referenciais como indicados na figura abaixo.



Temos $v_1 = v_{1x} = 0,6c$, $v_{1y} = v_{1z} = 0$, $v_2 = v_{2x} = -0,8c$, $v_{2y} = v_{2z} = 0$, no referencial da Terra.

Classicamente, a velocidade do próton 2 em relação ao próton 1 é a velocidade do próton 2 em relação à terra, $-0,8c$, mais a velocidade da terra em relação ao próton 1, $-0,6c$, isto é, no total, $-1,4c$. Notamos que esta velocidade é em módulo maior que c e que o sinal é negativo. Relativisticamente, esperamos uma velocidade em módulo menor do que c e com mesmo sinal negativo.

Relativisticamente, para determinar a velocidade do próton 2 em relação ao próton 1, usamos as fórmulas de transformações de velocidade, usando para S' o referencial ligado ao próton 1 da

$$v = 0,6c$$

esquerda. Daí a velocidade de S' em relação a S é $v = 0,6c$. Usamos para o objeto de velocidade \vec{u} em S o outro próton, 2. A velocidade \vec{u}' deste próton em relação a S' é a velocidade dos prótons um em relação ao outro, que estamos procurando, e é dada pelas fórmulas de adição de velocidades:

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2} = \frac{-0,8c - 0,6c}{1 - (-0,8c)(-0,6c)/c^2} = -0,95c$$

$$u'_y = u'_z = 0$$

Verificamos que a velocidade em módulo é menor do que c e com sinal negativo.

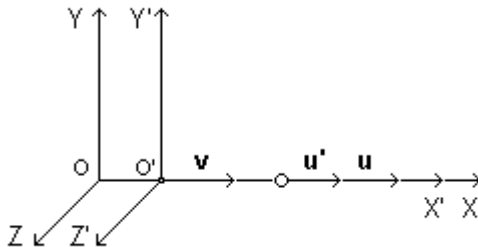
Se determinarmos a velocidade do próton 1 em relação ao próton 2 com a mesma técnica, acharemos

$$u''_x = 0,95c \quad u''_y = u''_z = 0$$

e , como esperado.

Exemplo 1

Uma partícula se move sobre os eixos X e X' . As componentes de \mathbf{u} ao longo dos eixos Y e Z e as componentes de \mathbf{u}' ao longo dos eixos Y' e Z' são nulas.



Escrevendo, por simplicidade, $u_x = u$ e $u'_x = u'$, a primeira transformada de velocidade dá:

$$u = \frac{u' + v}{1 + v u' / c^2}$$

Portanto, se $u' < c$ e $v < c$, então $u < c$.

E se $u' \rightarrow c$ e $v \rightarrow c$, então $u \rightarrow c$.

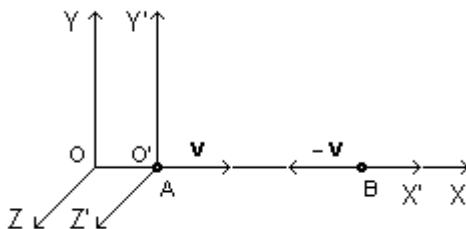
Assim, a velocidade resultante da soma de duas velocidades não pode ter módulo maior do que o módulo da velocidade da luz no vácuo.

Exemplo 2

Sejam dois referenciais inerciais R e R' .

Em R , as partículas A e B se movem em sentidos opostos sobre o eixo X com velocidades de módulos iguais a $0,70c$.

Em R' , a partícula A está em repouso.



A expressão acima pode ser usada para calcular o módulo da velocidade relativa dessas partículas, isto é,

o módulo da velocidade da partícula B em R', o referencial de repouso da partícula A.

Tomando, no referencial R, os módulos das velocidades das partículas A e B como sendo, respectivamente, $v = 0,70c$ e $u = -0,70c$ obtém-se $u' \approx -0,94c$.

Os sinais negativos em u e u' indicam que os movimentos da partícula B têm sentidos contrários àqueles considerados positivos para os eixos X de R e X' de R', respectivamente.

O módulo da velocidade relativa calculado pela mecânica clássica resulta $u' = -1,40c$.

Efeito Doppler para a luz

Existe um efeito Doppler para o som: se estivermos dirigindo em direção a um carro de polícia com buzina, a frequência parece mais alta (som agudo) e se estivermos nos afastando, parece mais baixa (som grave). O mesmo tipo de constatação vale se estivermos parados e o carro de polícia em movimento ou ainda se os dois estiverem em movimento. A variação da frequência é diferente se é a fonte ou o observador que está se movimentando. Precisamente (ver Halliday, Resnick e Walker cap.18):

- para a fonte em repouso: $f_{obs} = f_F \left(1 \pm \frac{v_{obs}}{v_{som}}\right)$
-
- para o detector em repouso: $f_{obs} = \frac{f_F}{1 \mp \frac{v_F}{v_{som}}}$
-
- para a fonte e o detector em movimento: $f_{obs} = f_F \frac{v_{som} \pm v_{obs}}{v_{som} \mp v_F}$

Nestas fórmulas, o sinal de cima corresponde a uma aproximação fonte-detector (observador) e o sinal de baixo à um afastamento.

Existe também efeito Doppler para a luz. Por exemplo, isto é usado pelos radares nas estradas: microondas são emitidas por uma fonte e refletida pelo carro em movimento. A diferença entre a frequência de emissão e reflexão fornece a velocidade do carro.

Nas fórmulas anteriores, em repouso, significa em relação ao meio de propagação (por exemplo o ar). Como a luz não precisa de um meio para se propagar, não estranharemos encontrar outra forma para seu efeito Doppler. Além disso esperamos ter uma só fórmula para fonte ou detector em movimento.

Existe também efeito Doppler para a luz. Por exemplo, isto é usado pelos radares nas estradas: microondas são emitidas por uma fonte e refletida pelo carro em movimento. A diferença entre a frequência de emissão e reflexão fornece a velocidade do carro.

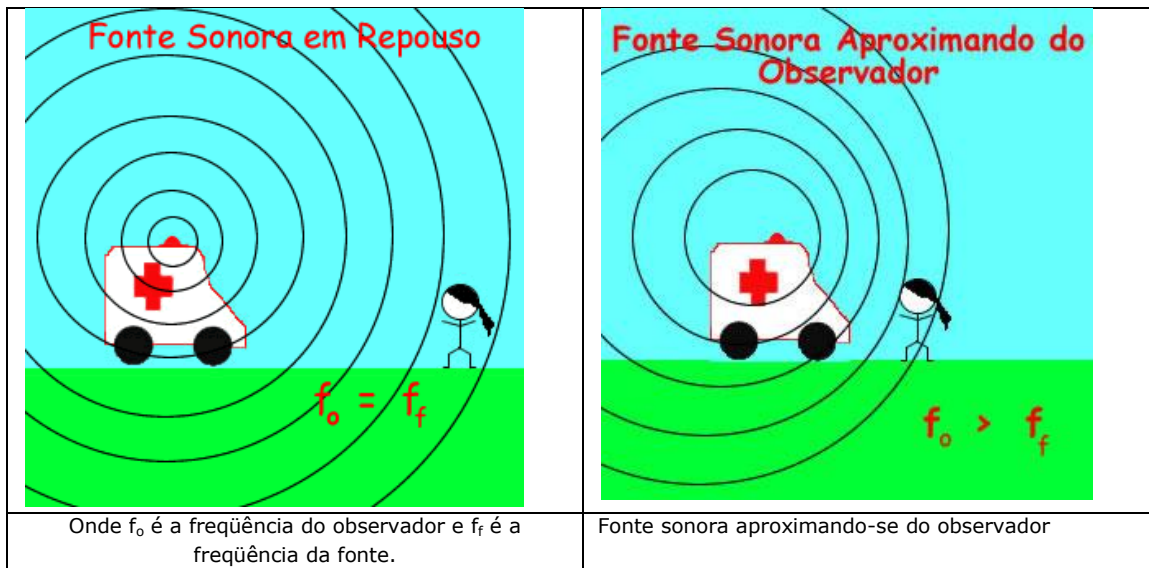


Fig5.3 – Efeito Doppler não relativístico

Nas fórmulas anteriores, em repouso, significa em relação ao meio de propagação (por exemplo o ar). Como a luz não precisa de um meio para se propagar, não estranharemos encontrar outra forma para seu efeito Doppler. Além disso esperamos ter uma só fórmula para fonte ou detector em movimento.

Vamos supor a fonte F em movimento e o observador e detector O em repouso: (A dedução a seguir pode ser encontrada em J. H. Smith "Introduction to Special Relativity").



No referencial do detector, seja:

- $t = 0$ o instante quando o sinal sai de F em S_1 ,
 $t = r_1/c$
- o instante quando o sinal chega ao detector + observador em O,
- Δt_F o instante quando este sinal sai da fonte F em S_2 ,
- $\Delta t_F + r_2/c$ o instante quando este sinal chega ao detector+observador em O.

Então o tempo entre a recepção destes sinais em O é:

$$\Delta t_D = \Delta t_F + \frac{r_2}{c} - \frac{r_1}{c}$$

$$r_1 - r_2 \approx S_1 S_2 \cos \theta$$

Se a fonte estiver longe do detector, . Sabemos também que

$$S_1 S_2 = v_F \Delta t_F$$

, de modo que podemos reescrever:

$$\Delta t_D = \Delta t_F \left(1 - \frac{v_F \cos \theta}{c} \right) \quad (*)$$

$$\Delta t_D = f_D^{-1} \quad \Delta t_F = f_F^{-1}$$

Classicamente, e de modo que:

$$f_D = \frac{f_F}{1 - v_F \cos \theta / c} \quad (\text{clássico})$$

Isto é a fórmula clássica do efeito Doppler para a luz com fonte em repouso e θ qualquer.

Notemos que se $\theta = 0^\circ$ (aproximação) e $\theta = 180^\circ$ (afastamento) teremos os casos particulares

$$f_D = \frac{f_F}{1 \mp v_F / c}$$

que é similar à fórmula do efeito Doppler do som com o detector em repouso.

Se refizermos as contas com o detector em movimento e a fonte parada, para $\theta = 180^\circ$ ou $\theta = 0^\circ$, encontraremos a fórmula clássica do efeito Doppler para a luz com fonte em repouso, similar á do som.

Em ambos os casos, se $\theta = \pm 90^\circ$, $f_D = f_F$.

$$\Delta t_D = f_D^{-1} \quad f_F^{-1}$$

Relativisticamente, no referencial de repouso do detector o período é , mas é o valor do período no referencial de repouso da fonte, ou seja, é um tempo próprio. No referencial de repouso do detector, este período será dilatado:

$$\Delta t_F = \left(1 - v_F^2 / c^2 \right)^{-1/2} f_F^{-1}$$

Portanto a expressão (*) para Δt_D poderá ser reescrita como:

$$\Delta t_D = f_D^{-1} = \left(1 - v_F^2/c^2\right)^{-1/2} f_F^{-1} (1 - v_F \cos\theta/c)$$

ou, de forma equivalente

$$f_D = \frac{\sqrt{1 - v_F^2/c^2}}{1 - v_F \cos\theta/c} f_F \quad (\text{relativístico})$$

onde \vec{v}_F é a velocidade da fonte em relação ao detector e θ é o ângulo entre \vec{v}_F e a direção de detecção.

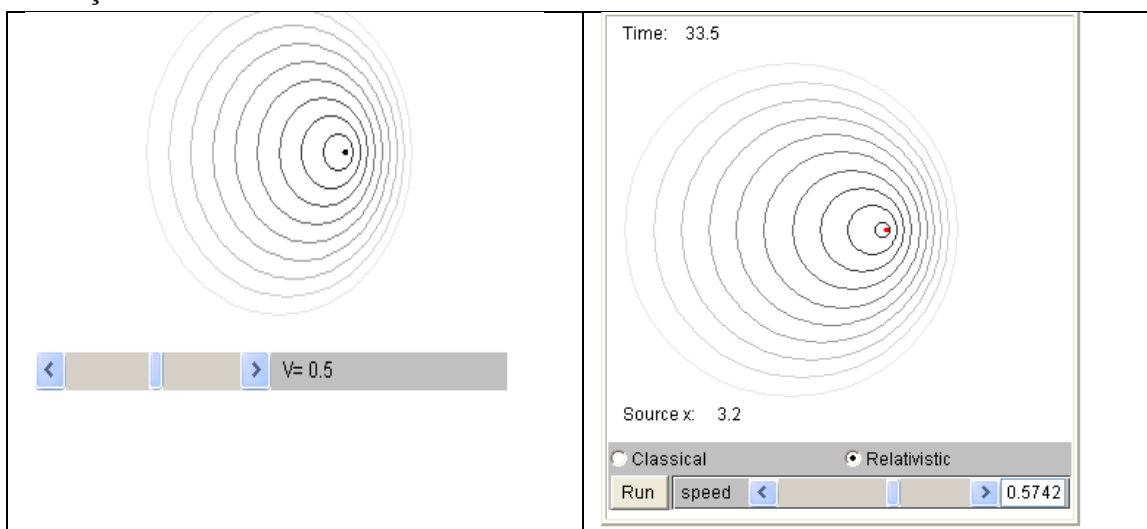


Fig5.4 – Applets de efeito doppler - <http://astro.if.ufrgs.br/Doppler/>

A expressão acima é a fórmula do efeito Doppler (relativístico) para a luz. Ela vale também (pelo 1º princípio) quando a fonte está em repouso e o detector em movimento, para tanto fazemos as substituições:

- $v_F \rightarrow v_D$,
- ângulo entre \vec{v}_F e direção de detecção \rightarrow ângulo entre \vec{v}_D e direção de emissão.

Observações:

1. Na dedução da fórmula do efeito Doppler relativístico, usamos como ingrediente crucial a dilatação do tempo.

2. Temos alguns casos particulares interessantes:

⊙ $f_D = f_F \sqrt{\frac{1+v/c}{1-v/c}} \geq f_F$
 fonte se aproximando $\Rightarrow \theta = 0^\circ$, ("blue shift"), isto é,
 mudança para frequências maiores, como esperado.

⊙ $f_D = f_F \sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \leq f_F$
 fonte se afastando $\Rightarrow \theta = 180^\circ$, ("red shift"), isto é,
 mudança para frequências menores, como esperado.

⊙ $\Rightarrow \theta = \pm 90^\circ$
 linha de mira ortogonal ao movimento da fonte,
 $f_D = f_F \sqrt{1 - v^2/c^2} \leq f_F$

. Este efeito é chamado de efeito Doppler transversal e puramente relativístico. Vemos que pela fórmula clássica acima, teríamos neste caso $f_D = f_F$. A existência do efeito Doppler transversal, característico da relatividade restrita, foi comprovada por várias experiências (Ives & Stilwell 1938 e 1941, Otting 1939, Kunding 1963, entre outros). Podemos ver que ele é consequência direta da dilatação do tempo.

3. Se fizermos $v \ll c$ na fórmula do efeito Doppler relativístico, recuperamos as fórmulas do efeito Doppler clássico (desde que nessas também façamos $v \ll c$).
4. Quando dirigimos na chuva, temos a impressão que a chuva cai obliquamente. Da mesma maneira, devido ao movimento da Terra ao redor do Sol, a luz que vem de uma estrela distante parece vir obliquamente. Esse efeito se chama **aberração da luz**. Da mesma maneira que para o efeito Doppler, pode se calcular uma expressão clássica e outra relativística, mas simétrica. (confira lista de exercícios)

Exemplo Importante:

Quando se observa o espectro da luz proveniente de uma galáxia distante onde é possível identificar linhas espectrais características e comparar com as mesmas linhas em um espectro terrestre, em geral, vê-se que a frequência se torna menor e se diz que houve um desvio para o vermelho. Isto é interpretado como uma evidência da expansão do universo (as galáxias se afastam uma das outras) e foi descoberto pelo astrônomo americano Hubble em 1929. Para fixar as idéias, consideremos o caso seguinte. O maior comprimento de onda emitido pelo átomo de hidrogênio na série de Balmer é

$$\lambda_0 = 656nm$$

. Na luz de uma galáxia distante, o comprimento de onda desta mesma linha espectral é $\lambda = 1458nm$. Determine a velocidade com a qual a galáxia está se afastando da Terra.

Solução:

Lembramos que frequência e comprimento de onda são relacionados por $\lambda f = c$ (no vácuo). Como $\lambda > \lambda_0$ então $f < f_0$, portanto deveremos ter um afastamento da galáxia:

$$f = f_0 \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \rightarrow \frac{f}{f_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}$$

portanto

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (\lambda_0/\lambda)^2}{1 + (\lambda_0/\lambda)^2} = 0,664$$

Observação: uma interpretação correta do redshift da luz de fontes distantes deve incluir a gravitação, isto é, temos que usar a relatividade geral.

Bibliografia

MOURÃO, Ronaldo R. de Freitas. *Explicando a Teoria da Relatividade*, Editora Tecnoprint S.A., 1987.

BAGNATO, Vanderlei S. (Assistência de Luiz G. Marcassa). *Introdução à Relatividade Especial*

A.P. French, Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series

Moises, Curso de Física Básica, vol.4, Ed. Blucher.

Tipler, Física Moderna. Ed. LTC

[Frederique Grassi](#); Notas de aula; plato.if.usp.br.

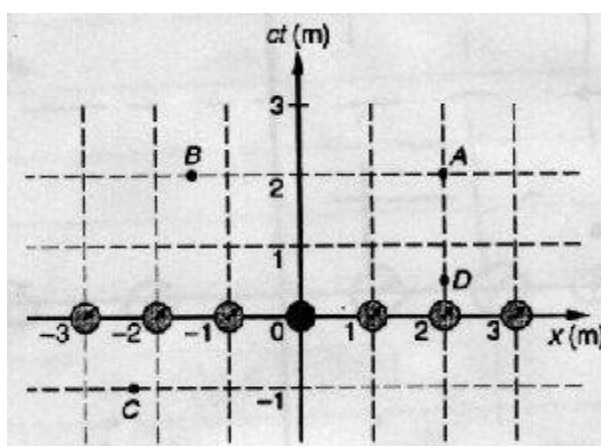
Cap. 6 - Diagramas Espaço-Temporal para um Referencial Inercial S

Vimos que vários efeitos (não simultaneidade, dilatação do tempo, contração dos comprimentos) decorrem dos dois postulados da relatividade restrita, com a constância da velocidade da luz tendo um papel central.

Vimos também como estes vários efeitos podem ser derivados a partir das transformações de Lorentz.

Neste capítulo, veremos uma terceira maneira de prever e visualizar estes efeitos usando diagramas de Minkowski ou digramas espaço-temporal. Eles foram introduzidos por H. Minkowski em 1908. A apresentação deste capítulo segue o capítulo 1 do livro "Modern Physics" de Tipler. Pode-se também ver o capítulo 3 do livro "Introduction to Relativity" de Kogut.

Primeiro, estudamos o caso de apenas um referencial inercial. Esquecemos os eixos y e z e representamos apenas x e t .



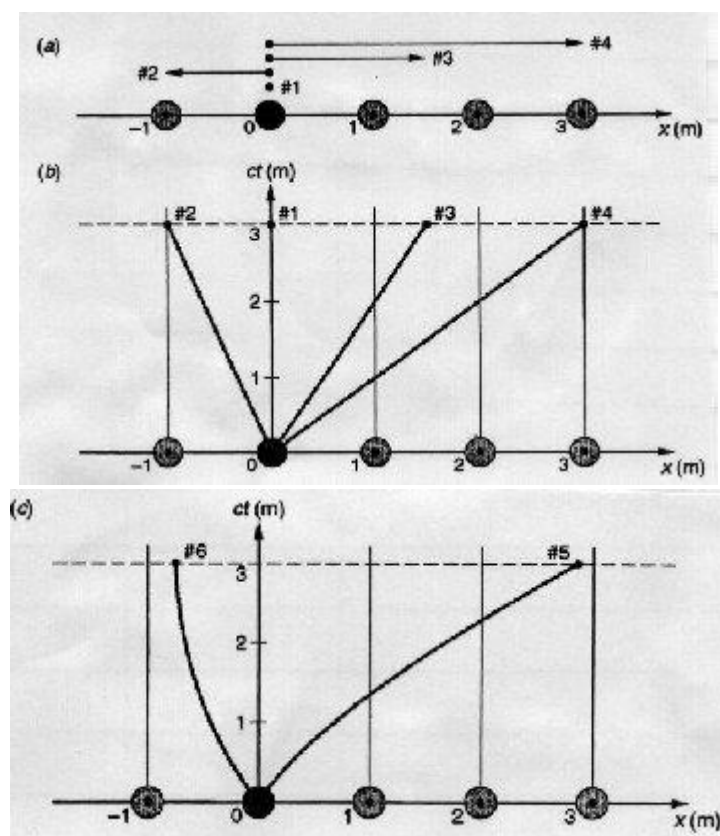
Isto permite evidenciar aspectos ligados ao espaço-tempo. Por exemplo:

- A e B acontecem simultaneamente em lugares distintos.
- A e D ocorrem no mesmo lugar $x = 2m$ embora em instantes diferentes de modo que o intervalo de tempo entre eles é um intervalo de tempo próprio.
- C ocorreu no passado ($ct = 0$ é o presente) já que $ct = -1m$ para este evento.

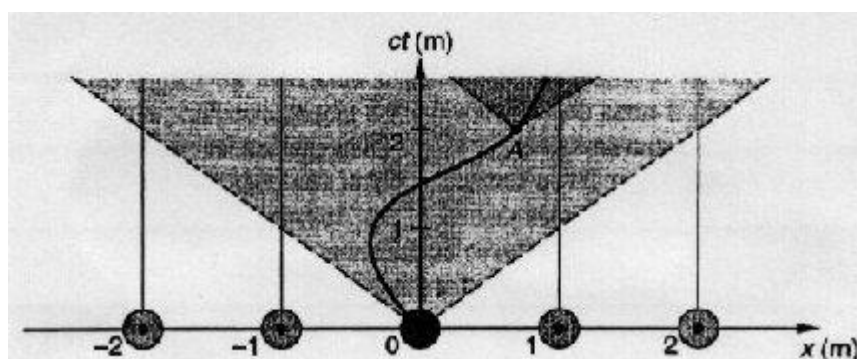
Outra informação interessante que pode ser colocada no diagrama espaço-tempo é a trajetória de uma partícula (sua posição em vários instantes). Essa trajetória recebe o nome de **linha universo da partícula**. Assim a figura (a) representa as velocidades supostas constantes, de quatro partículas, em $ct = 0$. A figura (b) mostra suas linhas de

$$x = v_{part}t$$

universo onde foi usado o fato que para cada uma das quatro partículas. A velocidade da partícula é o inverso da inclinação da linha universo. A figura (c) mostra como seriam as linhas de universo de partículas aceleradas.



Como nenhuma partícula material foi observada se movimentando com velocidade maior que a velocidade da luz, as inclinações das linhas de universo das partículas que passam por $x = 0$ e $ct = 0$ são maiores ou igual a $1/c$ e estão limitadas ao triângulo sombreado maior da figura abaixo. Os mesmos limites se aplicam a todos os pontos da linha do universo como no ponto A, definindo uma nova região acessível.



Representação do referencial S' em movimento em relação a S, no diagrama espaço tempo de S

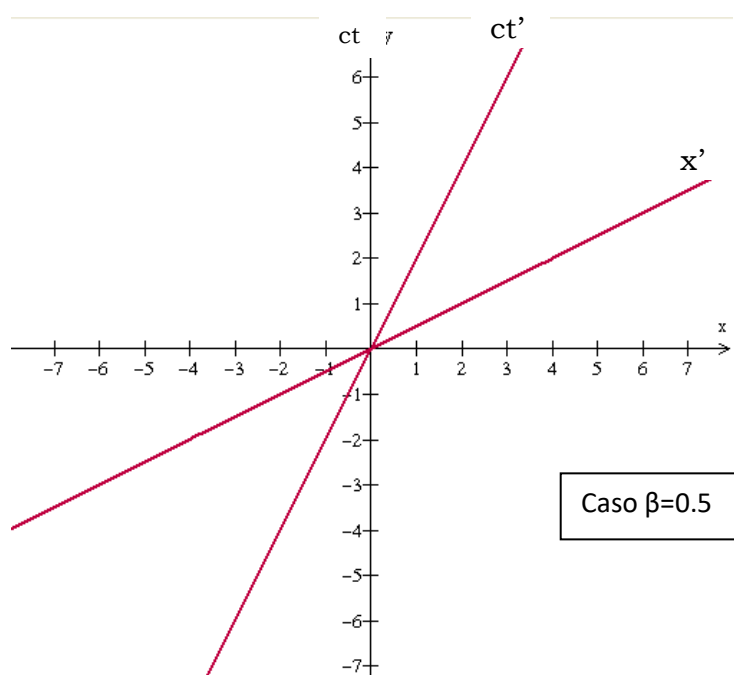
Agora queremos saber como representar, do ponto de vista do referencial inercial S, o referencial inercial S' que se movimenta com velocidade \vec{v} . Supomos que em $t = t' = 0$, as origens de S e S' coincidem, isto é, $x = x' = 0$. Queremos representar os eixos ct' e x' de S' em S. Então, ct' corresponde a $x' = 0$ e t' qualquer. Usando $x' = \gamma(x - vt) = 0$, obtemos $x = vt$. Usando a notação $\beta = v/c$, temos para o eixo ct' :

$$ct = \frac{x}{\beta}.$$

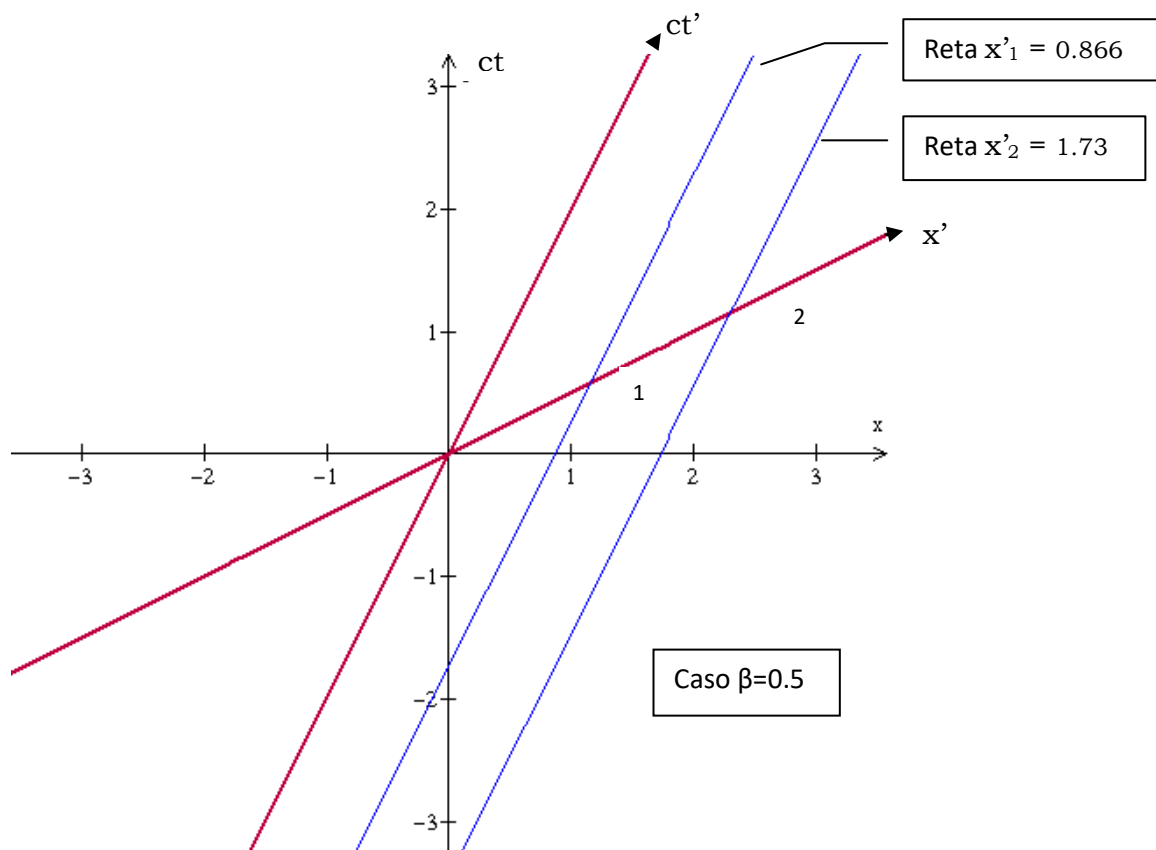
Da mesma maneira pode-se obter o eixo x' . Neste caso, $ct' = 0$ e $t' = \gamma(1 - vx/c^2)$ fornecem

$$ct = \beta x,$$

isto nos permite desenhar o referencial S' no diagrama espaço-tempo de S.



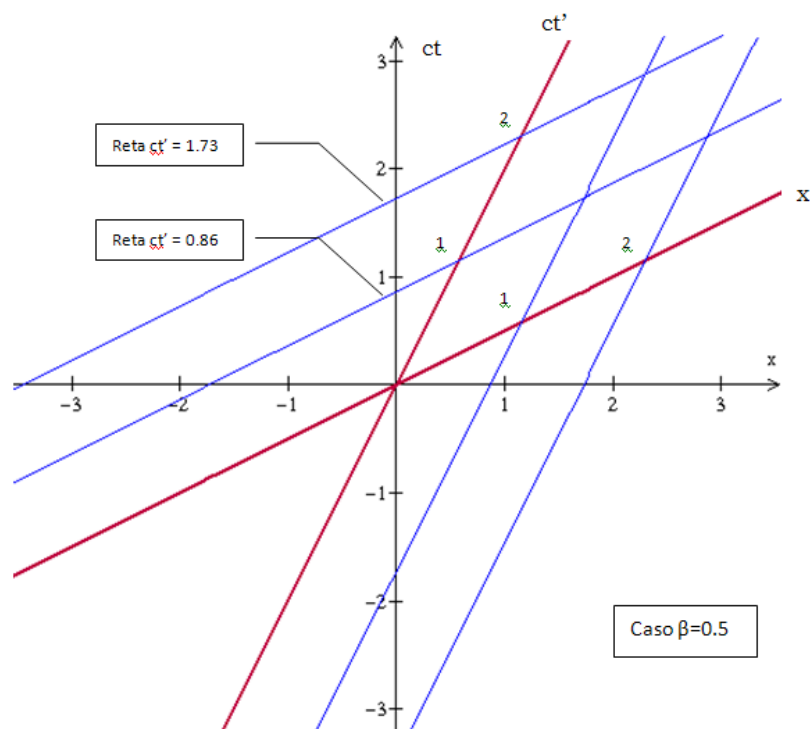
Precisamos também colocar uma escala nos eixos x' e ct' . Isto é um pouco mais delicado. Primeiro calculamos a equação em S das retas paralelas a ct' dadas por $x' = 1$, $x' = 2$, etc.



A reta paralela a ct' dada por $x' = 1$ intercepta o eixo x em x_1 com $ct = 0$, então:

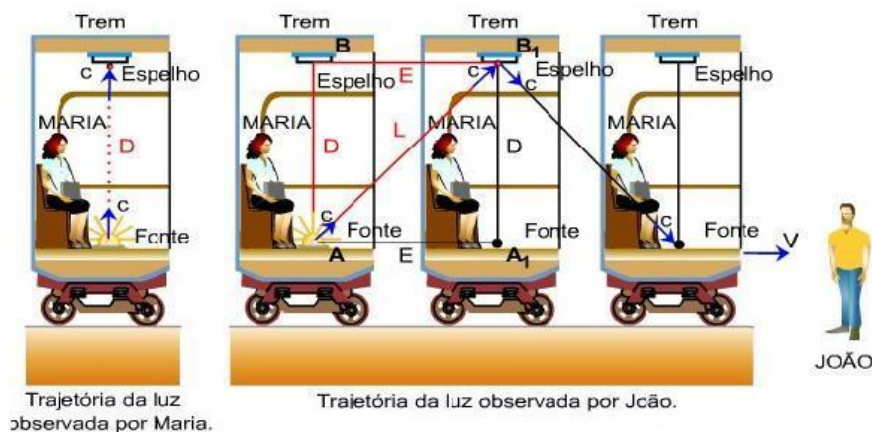
$$x' = 1 = \gamma (x_1 - v \cdot 0) \rightarrow x_1 = \frac{1}{\gamma} = \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,866 \text{ (para } v = 0,5c)$$

A reta paralela a ct' dada por $x' = 2$, intercepta o eixo x em x_2 com $ct = 0$. Logo: $x_2 = 2/\gamma \approx 1.73$, etc. Agora faremos o mesmo procedimento para o eixo ct' . Obtendo $ct_1 = 1/\gamma$, e $ct_2 = 2/\gamma$, etc.

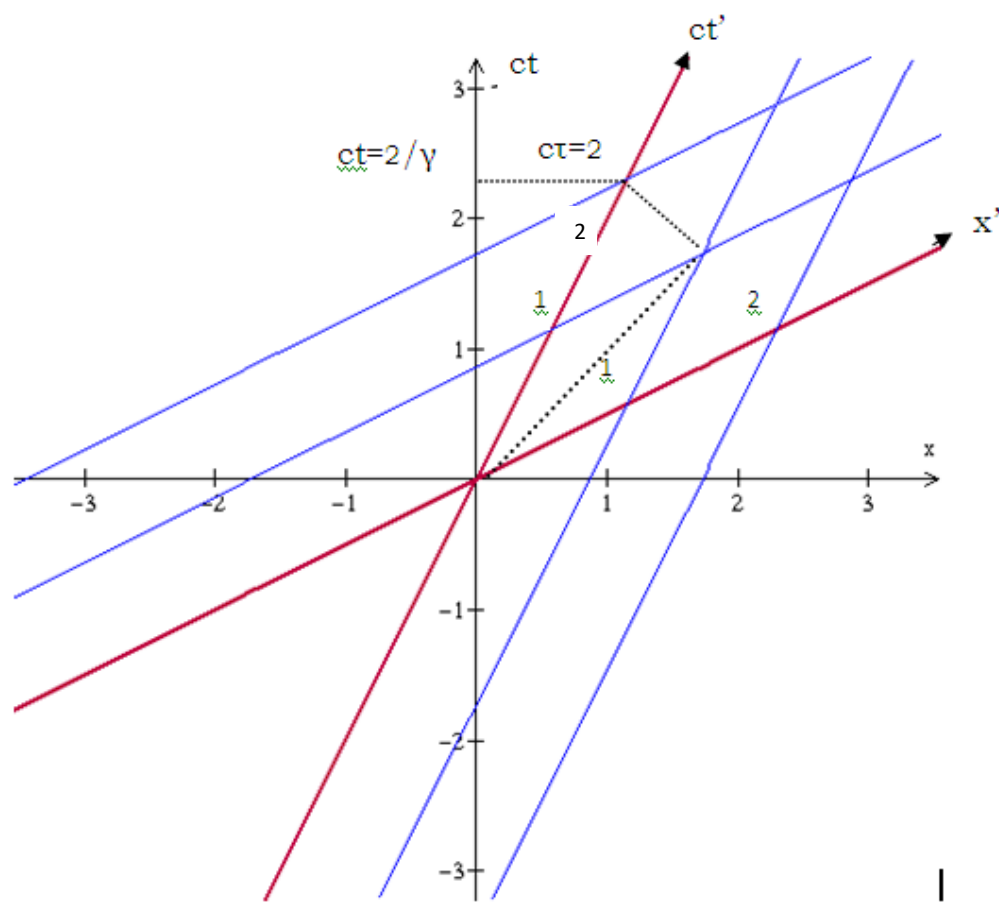


Dilatação do tempo com diagrama espaço-tempo

Vamos representar, em um diagrama espaço-tempo, a experiência que usamos para chegar à dilatação do tempo. Uma pessoa em um trem mede o tempo de ida e volta de um pulso luminoso e uma pessoa na plataforma faz o mesmo.



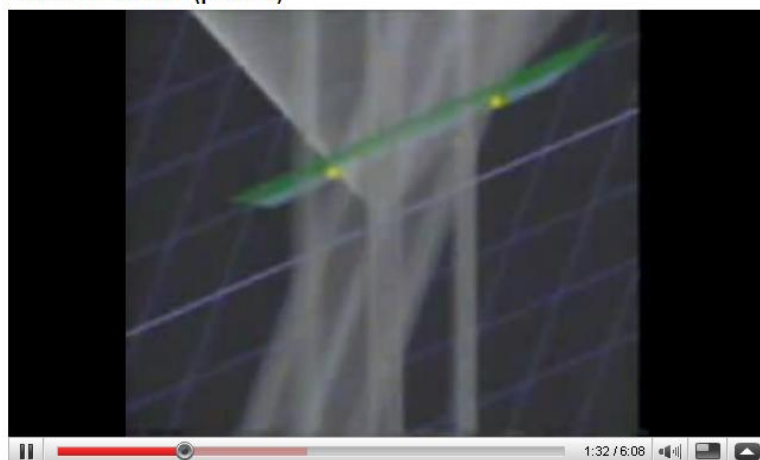
Vamos supor que o feixe sai de $x' = 0$ em $ct' = 0$ e é refletido em $x' = 1m$. O tempo de ida até o espelho em $x' = 1m$ é $ct' = 1m$. O tempo de ida e volta é $ct' = 1m + 1m = 2m$. O gráfico abaixo mostra em linha tracejada grossa a linha de universo do pulso.



Vemos assim que enquanto o observador no trem mede $ct' = c\tau = 2m$, o observador na plataforma encontra $ct = 2/\gamma$.

Ver o vídeo: <http://www.youtube.com/watch?v=Ff64JNYzzTU>

Einstein/Lorentz (parte 4)



O Intervalo de Espaço-Tempo

Na mecânica clássica, o comprimento de uma régua é uma quantidade fixa, que tem o mesmo valor para todos os observadores em referenciais inerciais. O mesmo vale para o intervalo de tempo entre dois eventos. Quantidades que tem o mesmo valor para todos os observadores inerciais são chamadas de invariantes. Assim, vemos que para as transformações Galileanas, existem pelo menos dois invariantes, o intervalo de espaço e o intervalo de tempo.

Para as transformações de Lorentz, comprimento e intervalo de tempo entre eventos não são invariantes. Qual quantidade seria então um invariante? Consideremos 2 eventos vistos por S e S'. É fácil ver que a quantidade

$$c^2 (t_2 - t_1)^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2 - (z_1 - z_2)^2$$

, que podemos escrever como

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$$

é um invariante por transformações de Lorentz.

Com isto, queremos dizer que em, apesar de encontrar $\Delta t' \neq \Delta t$, $\Delta x' \neq \Delta x$, $(\Delta y' \neq \Delta y$, $\Delta z' \neq \Delta z)$ se $\vec{v} \parallel \vec{x}$ encontra-se:

$$c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2 = c^2 (\Delta t')^2 - (\Delta x')^2 - (\Delta y')^2 - (\Delta z')^2 .$$

Esta quantidade é chamada intervalo espaço-temporal ao quadrado, $(\Delta s)^2$. Costuma-se classificar os eventos como:

- tipo temporal se $(\Delta s)^2 > 0$, $(\Delta t)^2$ domina no $(\Delta s)^2$
- tipo espacial se $(\Delta s)^2 < 0$, $(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$ domina no $(\Delta s)^2$
- tipo luminoso se $(\Delta s)^2 = 0$.

Consideremos estes 3 casos um a um.

- *Intervalo do tipo temporal:* nenhuma partícula material foi observada se movimentando com velocidade maior que c . Assim partículas sempre percorrem menor distância do que a luz, em um intervalo de tempo fixo, isto é, $\Delta x < c \cdot \Delta t$. Assim, $(\Delta s)^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 > 0$. De fato, todas as linhas do universo de partículas são do tipo temporal e se localizam na região escura do diagrama espaço-tempo abaixo. **Os intervalos do tipo temporal têm em comum o fato de sua ordem no tempo ser a mesma para qualquer observador localizado em um sistema inercial.** Isto pode ser verificado facilmente na figura. No referencial S os eventos A e B têm $ct_a = 0$ e $ct_b > 0$ daí $\Delta t = t_b - t_a > 0$. No referencial S' os eventos A e B têm $ct'_a = 0$ e $ct'_b > 0$ daí $\Delta t' = t'_b - t'_a > 0$. Vemos que em ambos

os referenciais, S e S', A acontece antes de B. Os intervalos de tempo entre dois eventos causais (dependem um do outro) são sempre do tipo temporal.

O intervalo de tempo próprio τ pode ser calculado a partir de Δs . Como $\Delta t = \tau$ quando $\Delta x = 0$ temos:

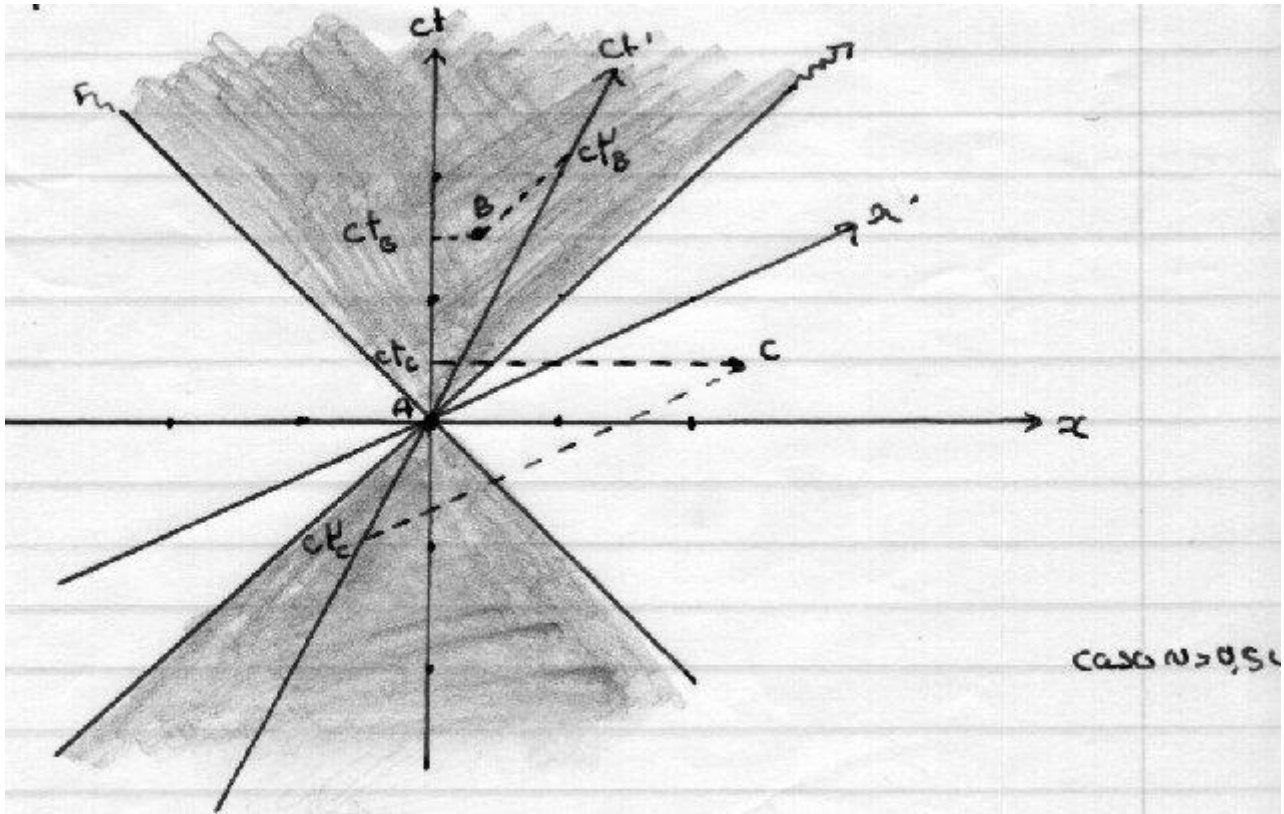
$$\frac{\Delta s}{c} = \sqrt{(\Delta t)^2 - \left(\frac{\Delta x}{c}\right)^2} = \sqrt{\tau^2 - 0} = \tau$$

- Intervalo do tipo espacial: separa eventos que não podem "comunicar-se" entre si, pois $\Delta x > c \Delta t$. Tais eventos ficam na região clara do diagrama abaixo. A ordem no tempo de eventos separados por um intervalo de tipo espacial depende do referencial. Por exemplo na figura, A ocorre antes de C em S e C ocorre antes de A em S'.

O comprimento próprio l_p pode ser calculado a partir de Δs . Quando dois eventos ocorrem simultaneamente no mesmo referencial, a distância entre eles é $\Delta x = l_p$, e $\Delta t = 0$. Assim

$$(\Delta s)^2 = -l_p^2 \rightarrow l_p = \sqrt{-(\Delta s)^2}$$

- Intervalo tipo luminoso: nesse caso, $\Delta x = c\Delta t$, isto corresponde a um pulso luminoso que deixa o local do primeiro evento no instante onde este ocorre e chega ao local do segundo evento no instante que este ocorre. Estes eventos estão localizados sobre a bissetriz dos eixos x e ct (ou, de modo equivalente, dos eixos x' e ct') cujas extremidades aparecem onduladas na figura.



EXEMPLO:

1. Usando um diagrama espaço-tempo, obter a idade de Ulisses no paradoxo dos gêmeos (usar $v = 0,8c$ e $l_p = 8$ anos luz, medido por Homero).
2. Quais são as linhas de universo de Homero e Ulises neste diagrama?
3. Ulises pode voltar antes de começar a viajar (já que ele volta tão jovem) para alguma velocidade?

Solução:

1. Desenhemos os eixos x e ct no referencial de Homero. Queremos desenhar x' e ct' , isto é, os eixos do referencial de Ulisses. Como vimos
 $x' = 0 = \gamma(x - vt) \rightarrow ct = x/\beta = 1,25x$

é a equação de ct' . Já

$$ct' = 0 = \gamma(ct - vx/c) \rightarrow ct = \beta x = 0,8x$$

é a equação de x' . Isto nos permite desenhar os eixos cinzas x' e ct' . Ainda precisamos fazer a calibração, em particular de ct' . A paralela a x' passando por

$$ct' = 1 \text{ intercepta } ct \text{ no ponto com } x = 0 \text{ e } ct_1 \text{ satisfazendo}$$

$$ct' = 1 = \gamma (ct_1 - v \cdot 0/c) \rightarrow ct_1 = \gamma^{-1} = 0,6$$

Assim podemos marcar onde é o "1" ao longo de ct' .

Lembramos que para Homero, o tempo de ida é $(0,8 \text{ anos luz})/(0,8c) = 10 \text{ anos}$.

Vemos, usando a calibração obtida, que para Ulisses, o tempo de ida é 6 anos.

Assim, para Homero o tempo de viagem total é de 20 anos e para Ulisses 12 anos.

- Homero tem velocidade nula no seu referencial, assim sua linha de universo

$$x = v_H t = 0$$

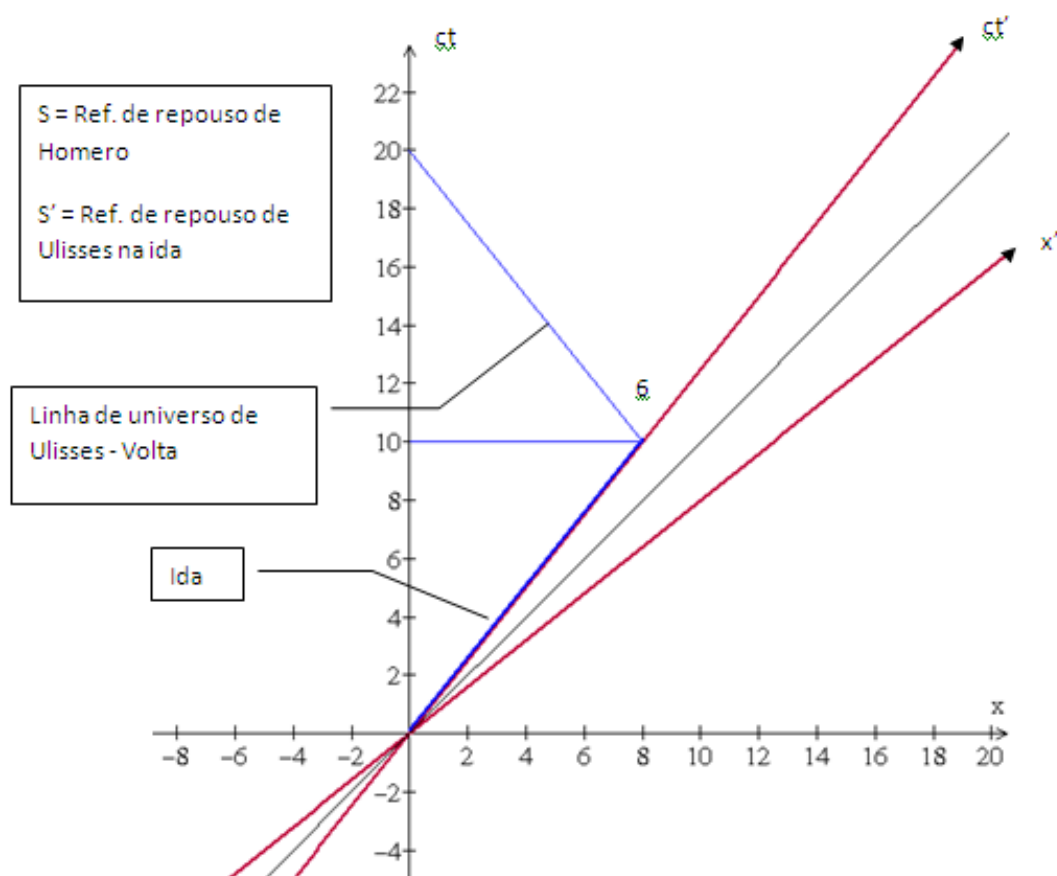
é ao longo do eixo ct . Isto está indicado em vermelho. Da mesma

maneira, na ida, no referencial de Ulisses, este está em repouso, sua linha de

$$x' = v_U t' = 0$$

universo é , i.e. ao longo de ct' . A linha de universo de Ulisses para a ida é indicada em azul. Um raciocínio similar para o referencial S'' de repouso para a volta, leva ao outro trecho azul.

- Os eventos início da viagem e fim da viagem (e de fato toda a linha de universo de Homero e a de Ulisses) ficam na região verde da figura. São dois eventos para os quais o intervalo de espaço tempo é temporal: a sua ordem não pode mudar.



Bibliografia

MOURÃO, Ronaldo R. de Freitas. *Explicando a Teoria da Relatividade*, Editora Tecnoprint S.A., 1987.

BAGNATO, Vanderlei S. (Assistência de Luiz G. Marcassa). *Introdução à Relatividade Especial* A.P. French, Special Relativity. The M.I.T. Introductory Physics Series

Moises, Curso de Física Básica, vol.4, Ed. Blucher.

Tipler, Física Moderna. Ed. LTC

Capítulo 7: GPS como exemplo prático de uso da relatividade

There is no better illustration of the unpredictable playback of fundamental science than the story of Albert Einstein and the Global Positioning System [GPS] ...the next time your plane approaches an airport in bad weather, and you just happen to be wondering ``what good is basic science", think about Einstein and the GPS tracker in the cockpit, guiding you to a safe landing.

Clifford Will

Não existe melhor ilustração do retorno imprevisível da ciência fundamental do que a história de Albert Einstein e o Sistema de Posicionamento Global [GPS] ... A próxima vez que seu avião se aproximar de um aeroporto com tempo ruim e você, por acaso, se perguntar ``qual a utilidade da pesquisa básica", pense em Einstein e o receptor GPS na cabine de pilotagem, guiando você numa aterrissagem segura.

Clifford Will

Como funciona um receptor GPS

Este texto é baseado (principalmente) no artigo ``Relativity and the Global Positioning System", de N.Ashby, Physics Today, maio de 2002 e nas informações do site <http://electronics.howstuffworks.com/gps.htm>

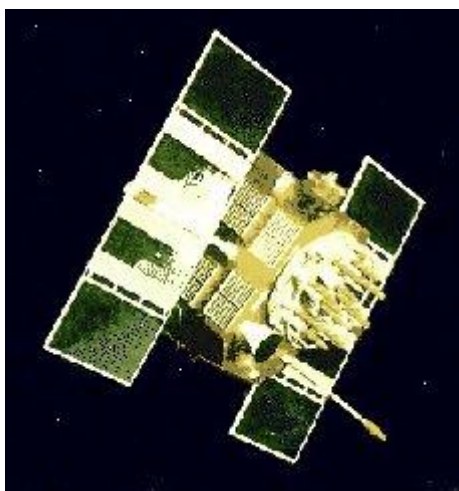
Subsections

- [Para que serve?](#)
- [Triangulação](#)
- [Localização com o GPS](#)
- [Exercício: precisão](#)

Para que serve?

Quando uma pessoa fala de GPS, normalmente ela se refere ao receptor GPS. A sigla GPS é uma abreviação de Global Positioning System e é um sistema que serve para se localizar sobre a Terra. O

sistema americano é o NAVSTAR e é formado por 27 satélites em órbita ao redor da terra (24 em operação mais três reservas). Bases terrestres de monitoramento gerenciam o bom funcionamento do sistema (por exemplo correção de órbitas). A figura abaixo mostra um satélite do sistema GPS.



O exército americano desenvolveu e implementou esta rede de satélites como um sistema de navegação militar. Hoje em dia, ele está acessível a civis e o "barulho" ("Selective Availability") que era adicionado para degradar a precisão da localização neste caso, foi retirado em maio de 2000. Durante um tempo curto, os russos mantiveram um sistema análogo ao GPS, o GLONASS. Hoje, os europeus planejam o GALILEO. Estes sistemas devem ser integrados no GNSS (Global Navigation Satellite System).

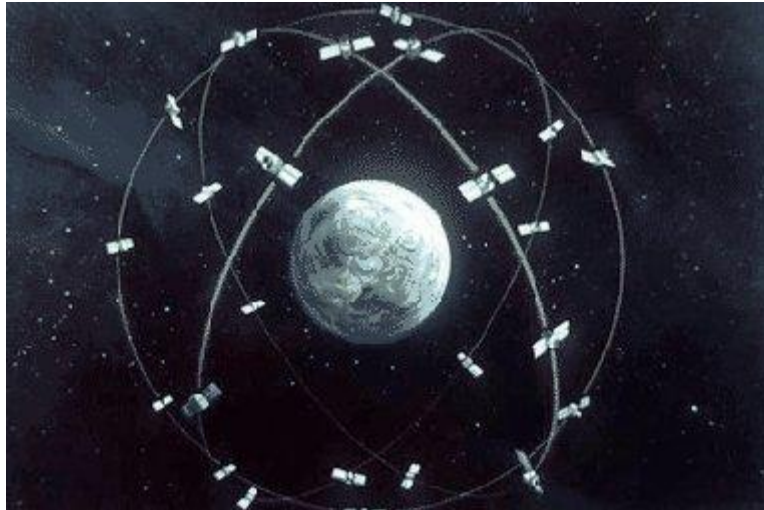
O uso do GPS não se restringe mais à navegação. Como cronômetro sua precisão é de um relógio atômico (como veremos mais detalhadamente). Em oceanografia, ele é usado para elaborar mapas de profundidades com a precisão de 5 cm (projeto franco-americano TOPEX-Poseidon). Em Geofísica, sistemas espaciais são usados para medir movimentos de placas tectônicas e prevenir terremotos. Em Meteorologia, ele é usado para fazer previsões do tempo (o sinal GPS sofre atraso ao se propagar na atmosfera da terra, este atraso depende, por exemplo, da umidade). Na agricultura, ele é usado para marcação de terra.

Space: Global Positioning System (GPS) Constellation



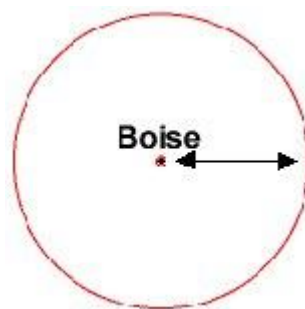
http://www.youtube.com/watch?v=v_6yeGcpoyE

Os satélites são agrupados por quatro, em seis órbitas inclinadas em 55° em relação ao plano equatorial. As órbitas são localizadas a aproximadamente 20.000 km da terra e são percorridas por um dado satélite duas vezes por dia. Esta configuração permite que em qualquer instante e em qualquer lugar da terra, pelo menos quatro satélites sejam ``visíveis''. O papel do receptor GPS é localizar quatro ou mais satélites, achar a distância até cada um deles e usar esta informação para deduzir sua própria posição. Esta operação é baseada na triangulação.

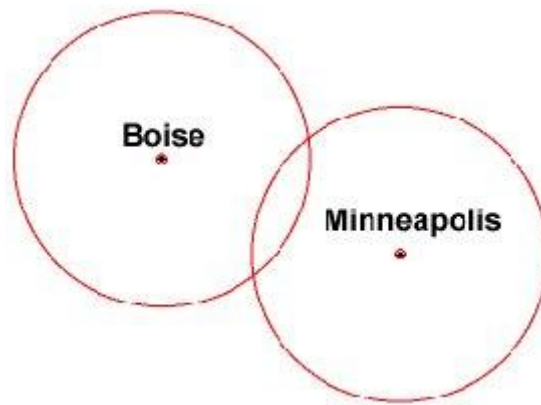


Triangulação

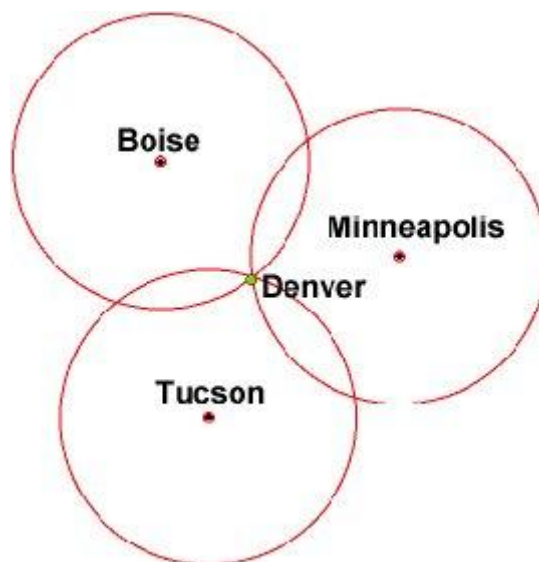
Para ilustrar este método, começaremos com um caso bidimensional. Suponha que você esteja perdido nos EUA e uma pessoa lhe informa que você está a 625 milhas de Boise. Você pode desenhar um círculo ao redor de Boise como a figura 3 mas ainda não sabe com precisão onde está, você está em algum ponto do círculo.



Agora outra pessoa lhe informa que você está a 690 milhas de Minneapolis. Você desenha outro círculo centrado em Minneapolis e sabe que deve estar em uma das duas interseções dos dois círculos, como na figura 4.



Finalmente, uma terceira pessoa lhe informa que você está a 615 milhas de Tucson. Você pode eliminar uma das duas possibilidades que sobravam pois o terceiro círculo só intercepta um destes dois pontos, como na figura 5. Você descobrira que está em Denver.



Em três dimensões o mesmo método funciona, mas nesse caso teremos esferas no lugar de círculos. Se você sabe que está a 10 milhas do satélite A, você pode estar em qualquer ponto de uma esfera de 10 milhas de raio centrada neste satélite. Se você souber que está também a 15 milhas do satélite B, você está na intersecção das duas esferas, sobre um círculo. Se tiver uma terceira esfera, ela intercepta este círculo em dois pontos. A própria Terra pode atuar como quarta esfera e eliminar um dos dois pontos possíveis que sobravam. Mas em geral, o uso de um quarto satélite permite melhorar a precisão.

Localização com o GPS

O receptor GPS calcula uma dada distância usando o tempo de viagem do sinal emitido pelo satélite até ele. Para isto, cada satélite leva relógios atômicos de alta precisão; estes relógios são sincronizados regularmente. O receptor GPS por sua vez, carrega um relógio a quartz (relógios atômicos custam entre \$50 000 e \$ 100 000) que é continuamente ajustado graças às informações dos satélites. Os satélites emitem ondas de radio, que sendo ondas eletromagnéticas, viajam a velocidade

constante c (segundo postulado da relatividade restrita). No sinal de cada satélite, há informação sobre hora (controlada pela frequência do relógio atômico) e localização da emissão. Supondo que o receptor receba simultaneamente em t , um sinal emitido em t_i , de cada um de quatro satélites $i = \{1, 2, 3, 4\}$. O receptor acha sua posição procurando a intercepção das quatro esferas de raio $c(t - t_i)$, centradas em cada um dos satélites.

Vemos assim que para se localizar com o GPS precisamos conhecer intervalos de tempo. Para obter uma boa precisão na determinação destes intervalos de tempo, efeitos da relatividade restrita (dilatação do tempo, ou mais precisamente, neste caso, o efeito Doppler transversal) e da relatividade geral (efeitos do campo gravitacional da Terra, seu movimento de rotação, etc) devem ser levados em conta. No exercício a seguir, veremos a influência da relatividade restrita no cálculo dos intervalos de tempo. No final do curso, veremos a influência da relatividade geral.

Launchpad: How GPS Works



GPS – <http://www.youtube.com/watch?v=DsmvTzw3GP4&feature=related>

Exercício: precisão

Por enquanto, estes cálculos levam em conta apenas efeitos da relatividade restrita.

Parte Teórica:

1. Mostre que se erros de navegação menores a 1 metro são desejados, um relógio deve desviar de menos de 4 nanosegundos da sincronização perfeita com os outros relógios. Somente relógios atômicos são capazes de desviar de menos de 4 nanosegundos por dia (para evitar acumulação do

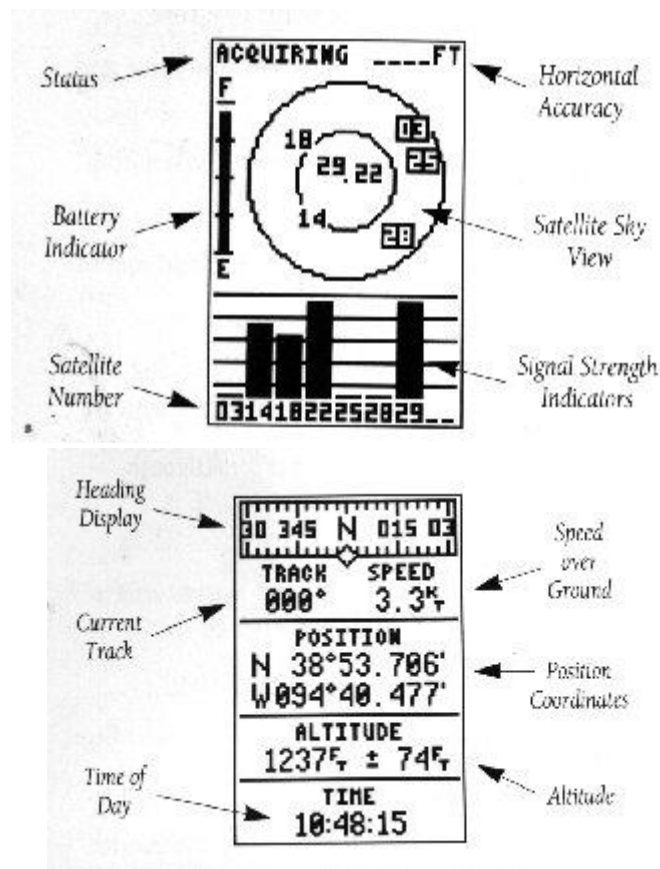
desvio, eles são re-sincronizados regularmente). Mostre que $\frac{\Delta f}{f_{sat}}$ é menor do que 10^{-13} , onde f_{sat} é a frequência do relógio do satélite.

2. Mostre que a velocidade dos satélites é da ordem de 4 km/s. Usando a fórmula do efeito Doppler relativístico com $\theta = 90^\circ$ (por quê?), mostre que a frequência recebida pelo receptor satisfaz $\Delta f / f_{sat} = v_{sat}^2 / 2c^2$. Calcule este valor numericamente.
3. O efeito da relatividade restrita calculado no item 2 deve ser incorporado no cálculo dos tempos pelos receptores GPS ou ele é desprezível comparado com o que foi calculado no item 1?

Parte Prática:

O receptor GPS pode fornecer uma variedade de informação tais como velocidade, rota a seguir até um certo ponto (waypoint), etc. Aqui só o usamos da forma mais simples.

1. Saia do prédio e em algum lugar, faça um mapa dos satélites vistos pelo receptor GPS incluindo posição e intensidade do sinal. Comente sobre a influência dos obstáculos (figura da esquerda abaixo).
2. Num certo ponto, anotar a hora indicada pelo GPS e as coordenadas (latitude, longitude e altura). Refaça a medida (com a ajuda de uma trena) num ponto afastado a 10 metros para norte ou sul. Seguindo o GPS, de quanto vão se deslocar? O resultado é compatível com 10 metros? (1' é latitude é equivalente a 1 milha náutica, isto é, 1852m)



Cap8 - DINÂMICA RELATIVÍSTICA

A necessidade de redefinir o momento

Vamos mostrar que o momento, tal como é definido classicamente, não é conservado na relatividade.

Consideremos uma colisão totalmente inelástica entre duas partículas idênticas (uma colisão perfeitamente inelástica acontece quando as duas partículas "grudam" uma na outra após a colisão). Primeiro, vamos estudar esta colisão classicamente e mostrar que nesse caso não há incoerência. Consideremos duas partículas de massa " m " e velocidade de módulo $|\vec{u}|$, vistas pelo referencial S do centro de massa das partículas, como na figura abaixo. Notemos que:

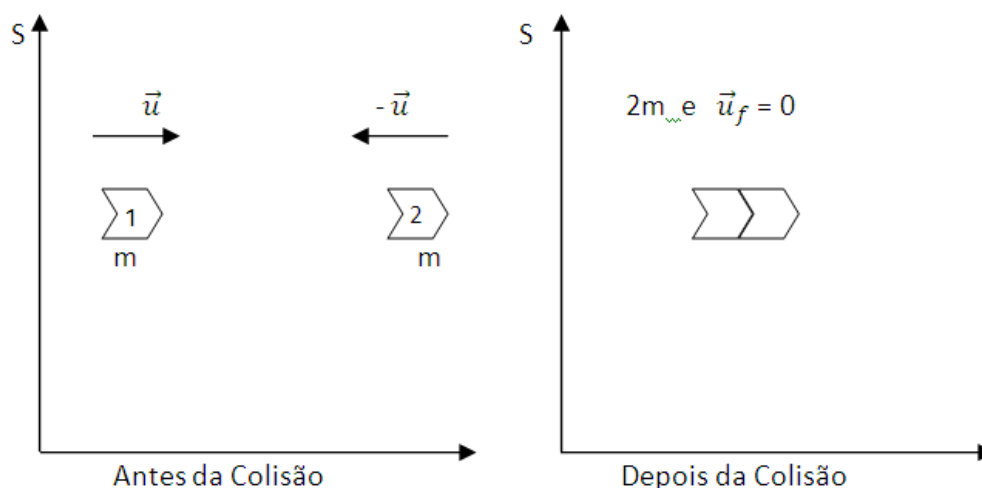


Fig 8.1 – Colisão perfeitamente inelástica

1. A velocidade final é nula devido à conservação de momento, $\vec{p}_f = \vec{p}_i = 0$.
2. A massa é conservada, portanto a massa final é $2m$.

Vejamos agora a mesma situação no referencial S' ligado à partícula 2.

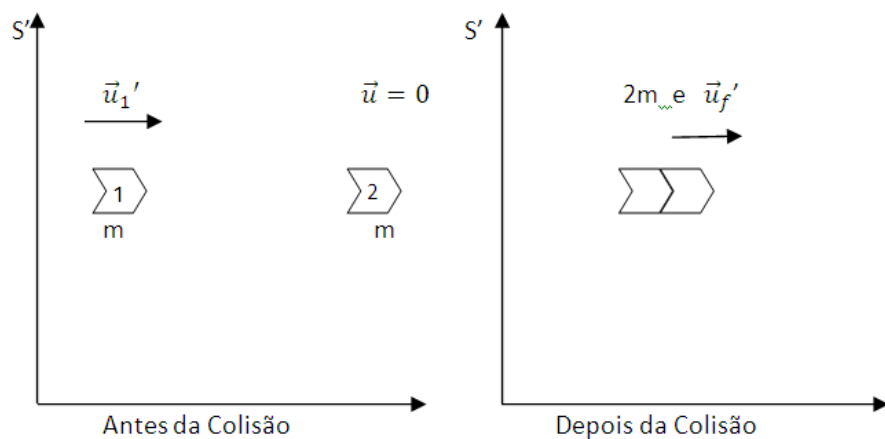


Fig 8.2 – Colisão perfeitamente inelástica. Alvo parado

S' tem velocidade $\vec{v} = -\vec{u}$ em relação à S portanto:

$$\vec{u}_i' = \vec{u} - \vec{v} = 2\vec{u}$$

$$\vec{u}_f' = \vec{0} - \vec{v} = \vec{u}$$

o momento também é conservado em S' pois $\vec{p}_i' = 2m\vec{u}$ e $\vec{p}_f' = 2m\vec{u}$.

Agora, vamos examinar esta colisão do ponto de vista da relatividade, também no referencial S'. Usaremos a lei de transformação de velocidades (supondo que o movimento acontece ao longo do eixo x):

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}$$

temos:

$$\begin{aligned} u_i' &= \frac{u - (-u)}{1 - uv/c^2} = \frac{2u}{1 + u^2/c^2} \leftarrow \text{mudou} \\ u_f' &= \frac{0 - (-u)}{1 - u \cdot 0/c^2} = u \leftarrow \text{não mudou} \end{aligned}$$

vemos que

$$\vec{p}_i' = \frac{2mu}{1 + u^2/c^2} \hat{x} \neq \vec{p}_f' = 2mu \hat{x}$$

ou seja, o momento não é conservado e isto está em contradição com o postulado 1 se a conservação do momento for considerada como lei da física. Como isto é desejável, modificaremos a definição do momento.

Exemplo1: Conservação do Momento em uma colisão perfeitamente elástica

Considere-se a colisão de duas partículas de massas iguais como vista nos dois referenciais inerciais R e R' com eixos paralelos e com R' se movendo com velocidade \mathbf{v} ao longo do eixo X de R.

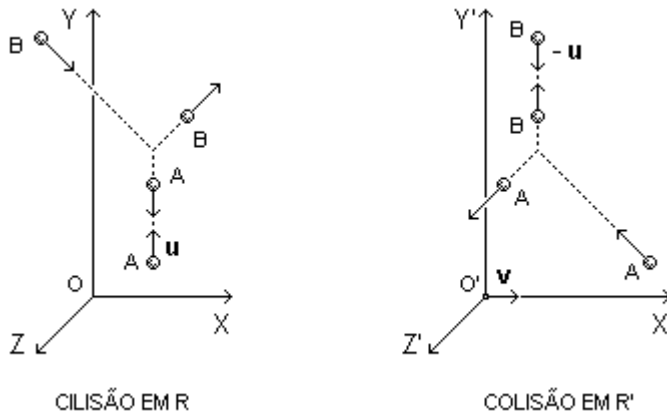


Fig 8.3 – Colisão perfeitamente elástica.

A partícula A tem velocidade inicial paralela ao eixo Y e de módulo u em R e a partícula B tem velocidade inicial paralela ao eixo Y' e de módulo $-u$ em R'.

A colisão provoca uma variação no momentum da partícula A ao longo do eixo Y de R de módulo:

$$\Delta p_{A,Y} = - \frac{2mu}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Os módulos das componentes da velocidade da partícula B em R' antes da colisão são $u'_{B,X} = 0$ e $u'_{B,Y} = -u$.

Com as transformadas de velocidade pode-se escrever as componentes da velocidade da partícula B ao longo dos eixos X e Y de R antes da colisão:

$$u_{B,X} = \frac{u'_{B,X} + v}{1 + vu'_{B,X}/c^2} = v$$

$$u_{B,Y} = \frac{u'_{B,Y}}{\gamma (1 + vu'_{B,X}/c^2)} = -\frac{u}{\gamma}$$

Então, a colisão provoca uma variação no momentum da partícula B ao longo do eixo Y

de R de módulo:

$$\Delta p_{B,Y} = \frac{2m(u/\gamma)}{\sqrt{1 - (u_B/c)^2}}$$

e como:

$$u_B^2 = u_{B,X}^2 + u_{B,Y}^2$$

$$u_{B,X} = v$$

$$u_{B,Y} = -u/\gamma$$

depois de um pouco de álgebra segue-se que:

$$\Delta p_{B,Y} = \frac{2mu}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Assim:

$$\Delta p_{A,Y} + \Delta p_{B,Y} = 0$$

e o momentum total ao longo do eixo Y de R é conservado.

A conservação do momentum ao longo do eixo X de R não será discutida.

O momento relativístico e a massa relativística

Na análise acima, consideramos que a massa era independente do movimento. Como já vimos que o comprimento de um objeto ou o ritmo de um relógio é afetado pelo movimento, não seria surpreendente que a massa também dependesse do movimento.

Reestudaremos a colisão inelástica da seção anterior.

Chamamos de massa própria, m_{pr} , a massa de uma partícula no seu referencial de repouso.

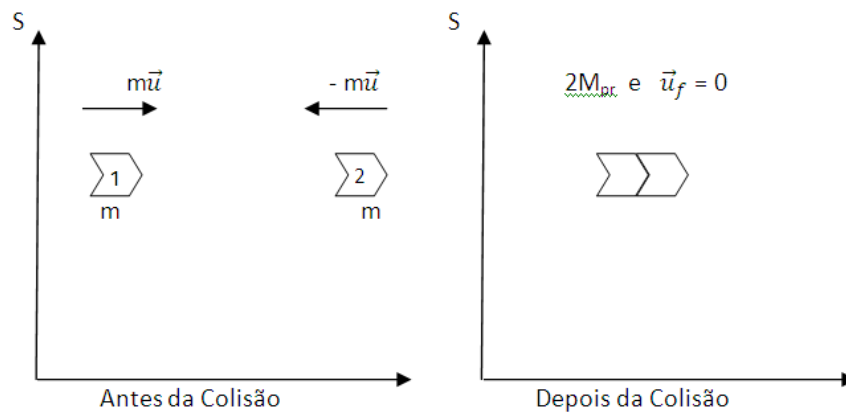


Fig 8.4 – Colisão perfeitamente inelástica.

aqui, m é a massa na velocidade \vec{u} ou $-\vec{u}$

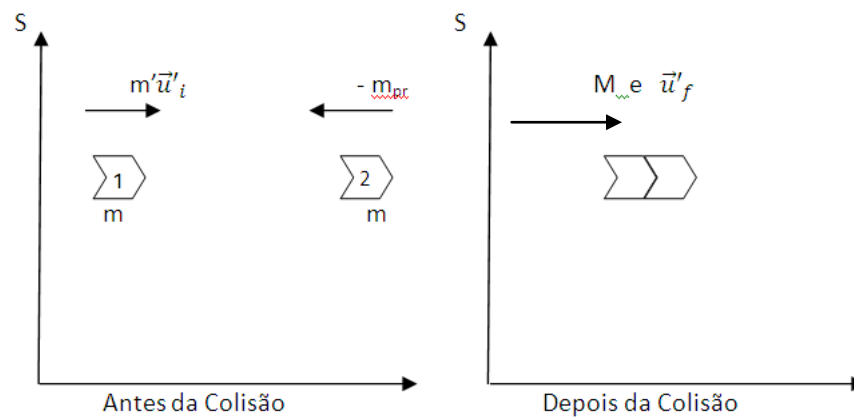


Fig 8.5 – Colisão perfeitamente inelástica. Partículas com velocidades distintas

Podemos refazer as contas anteriores para o referencial S':

$$p_i = m'u'_i = m' \frac{2u}{1 + u^2/c^2},$$

$$p_f = Mu'_f = Mu.$$

A conservação do momento relativístico dá:

$$Mu = m' \frac{2u}{1 + u^2/c^2}.$$

Se supusermos conservação de massa relativística:

$$M = m' + m_{pr},$$

daí, combinando as duas equações anteriores:

$$(m' + m_{pr}) u = m' \frac{2u}{1 + u^2/c^2} \rightarrow m' = \frac{1 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} m_{pr} .$$

Podemos mostrar que:

$$\frac{1 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - u_i'^2/c^2}} ,$$

pois temos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 - u_i'^2/c^2}} &= \left[1 - \left(\frac{2u}{1 - u^2/c^2} \frac{1}{c} \right)^2 \right]^{-1/2} \\ &= \frac{1 + u^2/c^2}{\sqrt{(1 + u^2/c^2) - (2u/c)^2}} \\ &= \frac{1 + u^2/c^2}{1 - u^2/c^2} , \end{aligned}$$

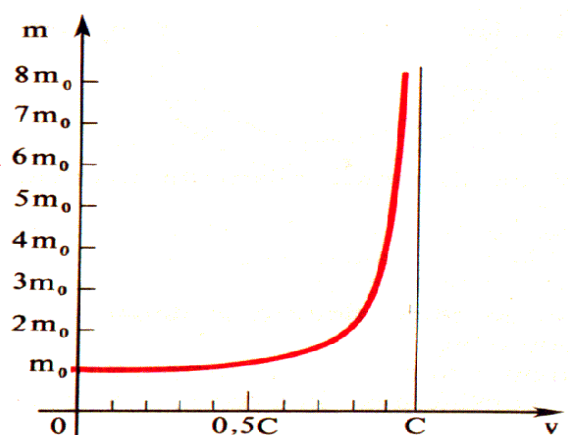
de modo que:

$$m' (u_i') = \frac{m_{pr}}{\sqrt{1 - u_i'^2/c^2}} ,$$

onde $m' (u_i)$ é a massa da partícula que viaja com velocidade \vec{u}_i . Daqui em diante, suporemos que este tipo de relação tem validade geral, não só para colisão inelástica

$$m(u) = \frac{m_{pr}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \gamma m_{pr} \geq m_{pr}$$

massa relativística de uma partícula com massa de repouso m_{pr} e velocidade u



Observações:

1. Este fator γ entrava de maneira parecida para a dilatação do tempo e contração dos comprimentos.
2. Vemos pela definição de $m(u)$ que se $u \rightarrow 0$, $m \rightarrow m_{pr}$, como esperado (limite newtoniano) e $p = mu \rightarrow m_{pr}u$, também como esperado.

Com essa definição de massa relativística o momento relativístico, $\vec{p} = m\vec{u} = \gamma m_{pr}\vec{u}$ é conservado e a massa relativística também.

Verificamos isto. No referencial S' é imediato: impomos justamente a conservação de massa e de movimento para obter a definição da massa relativística. No referencial S, precisamos verificar se as igualdades abaixo são satisfeitas:

$$\begin{aligned} M_{pr} &= 2m ? \\ \vec{p}_i &= m\vec{u} - m\vec{u} = 0 ? \\ &= \vec{p}_f = M_{pr}\vec{0} = \vec{0} ? \end{aligned}$$

A segunda parte da igualdade acima é trivialmente satisfeita. Para a primeira, usemos as informações do referencial S':

$$M = m' + m_{pr}$$

$$Mu'_f = Mu = m'u'_i = m' \frac{2u}{1 + u^2/c^2}$$

daí combinando as 2 equações anteriores para se livrar de m'

$$M = \frac{2m_{pr}}{1 - u^2/c^2}$$

de modo que

$$M_{pr} = M \sqrt{1 - u'^2/c^2} = M \sqrt{1 - u^2/c^2} = \frac{2m_{pr}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = 2m .$$

Energia Relativística

Na mecânica clássica, definimos a energia cinética de uma partícula como o trabalho realizado por uma força externa para acelerar a partícula do repouso até uma velocidade u :

$$K = \int_0^u \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

onde \vec{F} é a força que desloca a partícula de uma distância $d\vec{l}$. Em uma dimensão temos (classicamente):

$$K = \int_0^u F \cdot dx = \int_0^u m_{pr} \frac{du}{dt} dx = m_{pr} \int_0^u u du$$

$$K = \frac{1}{2} m_{pr} u^2.$$

Na mecânica relativística tentamos proceder de maneira igual. Primeiro precisamos definir a força. A segunda lei de Newton pode ser generalizada para a forma relativística:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_{pr} \vec{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right).$$

Observações:

1. Se $\vec{F} = \vec{0}$, o momento (relativístico) é conservado, como esperado.

$$\vec{F} \neq m\vec{a}$$

2. pois:

$$\vec{F} = \frac{m_{pr}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\vec{u}}{dt} + m_{pr} \vec{u} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right)$$

$$\neq m\vec{a} = \frac{m_{pr}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \frac{d\vec{u}}{dt}$$

3. Sabemos transformar coordenadas de um referencial para outro

$$\{x, y, z, t\} \rightarrow \{x', y', z', t'\}$$

através das transformações de Lorentz. Sabemos

$$\{u_x, u_y, u_z\} \rightarrow \{u'_x, u'_y, u'_z\}$$

transformar velocidades

com a lei de transformação

de velocidades. Transformar momento, energia e força requer também cuidado,

conforme veremos na próxima seção. Por enquanto usaremos o referencial do laboratório.

Agora calculamos:

$$\begin{aligned} K &= \int_0^u F \cdot dx = \int_0^u \frac{d}{dt}(mu) dx = \int_0^u d(mu) \frac{dx}{dt} \\ &= \int_0^u (mdu + udm) u = \int_0^u (mudu + u^2 dm) . \end{aligned}$$

$$m = m_{pr} / \sqrt{1 - u^2/c^2} \rightarrow m^2 c^2 - m^2 u^2 = m_{pr}^2 c^2$$

Notemos que e daí

$$2mc^2 dm - 2m^2 u du - 2u^2 m dm = 0$$

de modo que:

$$K = \int_0^u c^2 dm = mc^2 - m_{pr} c^2 ,$$

daí a energia cinética relativística fica:

$$K = (\gamma - 1) m_{pr} c^2 .$$

A partir deste resultado, é usual introduzir a energia relativística:

$$E = \gamma m_{pr} c^2 = mc^2 = K + m_{pr} c^2 .$$

L.H.C. Acelerador de Partículas



Fig 8.6 - Ver video: <http://www.youtube.com/watch?v=sO4mRPj9xXA>

Observações:

- Podemos verificar que para baixas velocidades, K tende para seu valor clássico:

$$K = m_{pr} c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right) \rightarrow m_{pr} c^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{u}{c} \right)^4 + \dots - 1 \right]$$

$$K = \frac{1}{2} m_{pr} u^2 \left[1 + \frac{3}{8} \left(\frac{u}{c} \right)^2 + \dots \right] \sim \frac{1}{2} m_{pr} u^2$$

onde usamos

$$(1 + z)^n \sim 1 + nz + \frac{n(n-1)}{2} z^2 + \dots$$

$$n = -1/2 \quad z = -\left(\frac{u}{c}\right)^2$$

com e .

- Se $u \rightarrow c$, temos $K \rightarrow \infty$, ou seja, uma quantidade de trabalho infinita seria necessária para acelerar uma partícula até a velocidade da luz.

- Outra forma útil para a expressão de energia é a seguinte:

-

$$E = \sqrt{(pc)^2 + (m_{pr} c^2)^2}$$

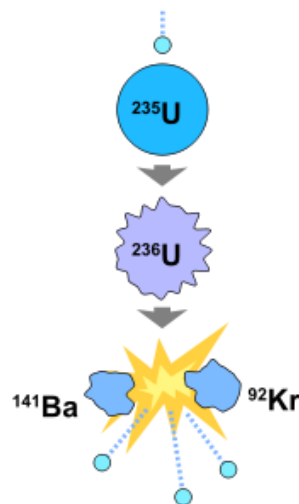


Fig 8.7- Diagrama representativo da fissão nuclear do átomo de urânio: o nêutron se colide com o núcleo que fica instável e se divide em dois novos menores e mais leves (bário e criptônio), que por sua vez se desintegram em energia, radiação gama e alguns nêutrons.

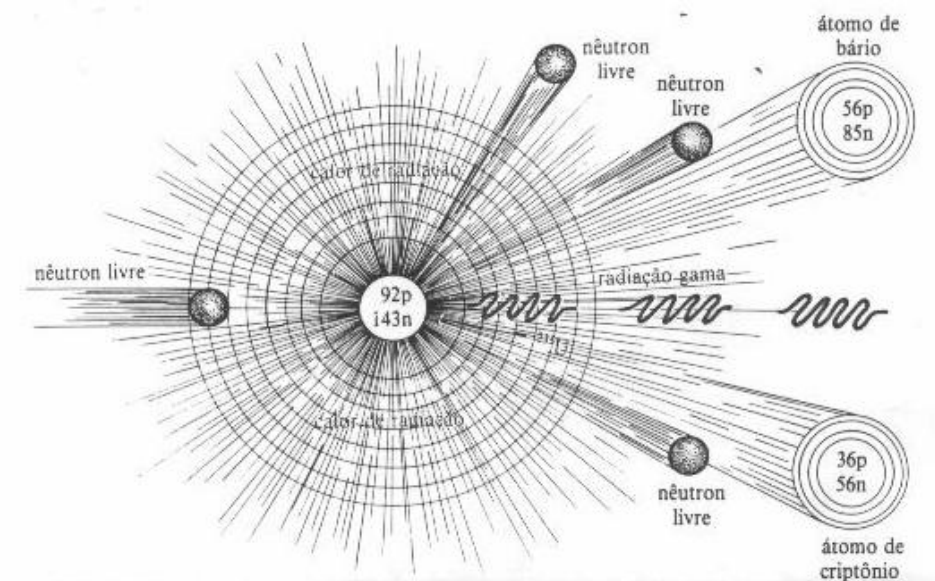
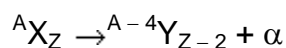


Fig.8.8 - Fissão Nuclear

Exemplo: **Decaimento α** – (tirado de UFSM)

No decaimento α , o núcleo pai emite uma partícula α , composta de dois prótons e dois nêutrons. Assim, quando um núcleo emite uma dessas partículas, seu número atômico diminui de duas unidades e o seu número de massa, de quatro unidades:



O núcleo A_ZX é chamado núcleo pai e o núcleo ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ é chamado núcleo filho. Por exemplo:

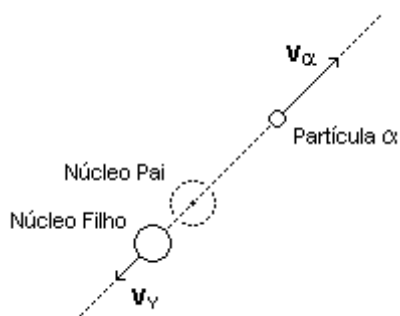
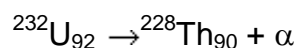


Fig 8.9 – Decaimento Alpha – Processo inverso de uma colisão inelástica.

Se o núcleo filho está em um estado excitado ele passa, posteriormente, ao estado fundamental, por emissão de radiação eletromagnética (radiação γ). Assim, o decaimento α pode ser acompanhado de decaimento γ .

A energia liberada no decaimento α pode ser calculada pela seguinte expressão, que vem diretamente do princípio de conservação da energia:

$$Q = [M(X) - M(Y) - m(\alpha)] c^2$$

onde $M(X)$, $M(Y)$ e $m(\alpha)$ são, respectivamente, as massas do núcleo pai, do núcleo filho e da partícula α .

Para a reação de decaimento do urânio 232 dada acima, como:

$$M(U) = 232,1095 \text{ u}$$

$$M(Th) = 228,0998 \text{ u}$$

$$m(\alpha) = 4,0026 \text{ u}$$

$$uc^2 = 931,4815 \text{ MeV}$$

segue-se que:

$$Q = [232,1095 - 228,0998 - 4,0026] 931,4815 \text{ MeV} = 6,6135 \text{ MeV}$$

O valor positivo para a energia liberada significa que o processo pode ocorrer espontaneamente. Esta energia fica distribuída entre o núcleo filho e a partícula α em proporções diferentes.

Para calcular estas proporções, suponha-se o núcleo pai em repouso no momento do decaimento e o núcleo filho no seu estado fundamental. Então, o princípio de conservação da energia fornece:

$$Q = K_y + K_\alpha$$

onde:

$$K_y = \frac{1}{2} M(Y) v_y^2$$

$$K_\alpha = \frac{1}{2} m(\alpha) v_\alpha^2$$

O princípio de conservação da quantidade de movimento fornece:

$$M(Y) v_y = m(\alpha) v_\alpha$$

Isolando v_y desta expressão e colocando na outra, vem:

$$Q = K_\alpha [m(\alpha) / M(Y) + 1]$$

e daí:

$$K_{\alpha} = QM(Y) / [m(\alpha) + M(Y)]$$

E desta expressão, com v_{α} da expressão da conservação da quantidade de movimento, segue-se que:

$$K_y = Qm(\alpha) / [m(\alpha) + M(Y)]$$

Assim, as energias cinéticas da partícula α e do núcleo filho são inversamente proporcionais às respectivas massas. Isso fica mais claro dividindo-se uma pela outra as expressões acima, resultando:

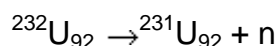
$$K_{\alpha} / K_y = M(Y) / m(\alpha)$$

Portanto, para a reação de decaimento do urânio 232 dada acima, as energias cinéticas da partícula α e do núcleo filho, ficam:

$$K_{\alpha} = 6,6135 \text{ MeV} (228,0998 \text{ u}) / (228,0998 \text{ u} + 4,0026 \text{ u}) = 6,4995 \text{ MeV}$$

$$K_{Th} = 6,6135 \text{ MeV} (4,0026 \text{ u}) / (228,0998 \text{ u} + 4,0026 \text{ u}) = 0,1140 \text{ MeV}$$

Nenhum núcleo decai espontaneamente com emissão de prótons, nêutrons, dêuterons ou qualquer outro tipo de grupo de núcleons porque os correspondentes valores de Q são negativos. Por exemplo, para o processo:



com:

$$M(^{232}\text{U}) = 232,1095 \text{ u}$$

$$M(^{231}\text{U}) = 231,1082 \text{ u}$$

$$m(n) = 1,0087 \text{ u}$$

$$uc^2 = 931,4815 \text{ MeV}$$

segue-se:

$$Q = [232,1095 - 231,1082 - 1,0087] 931,4556 \text{ MeV} = - 6,8928 \text{ MeV}$$

Portanto, o núcleo de urânio 232 é estável em relação ao decaimento pela emissão de um nêutron.

As desintegrações mencionadas acima só podem ocorrer com o fornecimento de

energia para o núcleo pai para levá-lo a um estado excitado. Esse tipo de processo é o que mais propriamente se chama de reação nuclear.

Velocidade Limite

Considere-se uma partícula de massa m sobre a qual atua uma força \mathbf{F} paralela à sua velocidade \mathbf{u} .

Na teoria da relatividade especial, a expressão $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$ da mecânica clássica é mantida, mas \mathbf{p} é o momentum relativístico.

Assim, levando em conta a definição do momentum e o fato de \mathbf{F} ser paralela a \mathbf{u} , o que permite pensar apenas em termos dos módulos, segue-se, depois de um pouco de cálculo, que:

$$F = \frac{m}{[1 - (u/c)^2]^{3/2}} \frac{du}{dt}$$

e como $du / dt = a$ é o módulo da aceleração:

$$a = \frac{F}{m} [1 - (u/c)^2]^{3/2}$$

Para F e m constantes, dessa expressão se pode deduzir que $a \rightarrow 0$ quando $u \rightarrow c$. E isso, qualquer que seja o valor de F .

Em palavras: uma força de módulo constante, atuando sobre uma partícula, produz uma aceleração cujo módulo tende a zero quando o módulo da velocidade da partícula se aproxima do módulo da velocidade da luz no vácuo.

Portanto, o módulo da velocidade da luz no vácuo é o valor limite para o módulo de qualquer velocidade associada a partículas ou corpos físicos.

Energia de uma Partícula Livre

Na teoria da relatividade especial, o trabalho de uma força sobre uma partícula é definido como na mecânica clássica, desde que a força seja dada por $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$, onde \mathbf{p} é o momentum relativístico.

E a igualdade entre o trabalho de uma força sobre uma partícula e a variação da sua energia cinética continua valendo.

Agora, seja, num certo referencial, uma partícula acelerada do repouso até uma velocidade \mathbf{u} por uma força \mathbf{F} sempre paralela à velocidade.

Dessa forma, pode-se escolher o eixo X do referencial na direção do movimento, supor que a partícula foi acelerada de 0 a x e pensar apenas em termos de módulos.

Na situação considerada, o trabalho da força \mathbf{F} é igual à energia cinética K adquirida pela partícula e se pode escrever:

$$K = \int_0^x F \, dx = \int_0^u \left(\frac{dp}{du} \right) u \, du$$

e como, da expressão para o momentum relativístico:

$$\frac{dp}{du} = \frac{m}{[1 - (u/c)^2]^{3/2}}$$

segue-se, depois de um pouco de cálculo, a seguinte expressão para a energia cinética relativística de uma partícula de massa m e velocidade de módulo u no referencial considerado:

$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} - mc^2$$

Essa expressão pode, também, ser escrita na forma:

$$E = mc^2 + K$$

onde E , que representa a energia total de uma partícula livre na teoria da relatividade especial, está definida por:

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

Esta expressão mostra que a energia de uma partícula livre, no contexto da teoria da relatividade especial, é sempre uma grandeza diferente de zero, positiva e bem determinada, ligada diretamente a sua massa.

Na mecânica clássica, a energia é definida a menos de uma constante aditiva arbitrária e, dependendo da escolha dessa constante, pode ser positiva ou negativa.

A energia de repouso da partícula livre, isto é, a energia no referencial em que a partícula está em repouso, é dada fazendo-se $u = 0$ na expressão acima:

$$E_0 = mc^2$$

Aqui vale a pena enfatizar que essa expressão vale para uma partícula livre. Ela não é universal e não vale, por exemplo, para uma partícula numa região onde existe um campo de forças externo.

Corpo Livre

As expressões acima valem também para um corpo livre sendo m a sua massa e u , o módulo da sua velocidade no referencial considerado.

A energia de repouso de um corpo livre, em particular, compreende as energias de repouso das partículas que o constituem e, também, as energias cinéticas dessas mesmas partículas e as energias potenciais associadas às suas interações mútuas.

Desta forma, se m representa a massa do corpo livre e m_k , com $k = 1, 2, \dots, N$, as massas das N partículas que constituem esse corpo, então:

$$mc^2 \neq [m_1 + m_2 + \dots + m_N] c^2$$

ou então:

$$m \neq m_1 + m_2 + \dots + m_N$$

Desta forma, a energia de repouso de um corpo livre não é igual à soma das energias de repouso das partículas que o constituem e a massa de um corpo livre não é igual à soma das massas das partículas que o constituem.

Por outro lado, se um corpo livre é estável, o valor numérico da energia potencial total associada às interações mútuas entre as partículas que o constituem deve ser maior do que o valor numérico da energia cinética total dessas mesmas partículas.

E como a energia potencial é negativa e a energia cinética é positiva, a energia de repouso do corpo é menor do que a soma das energias de repouso das partículas que o constituem quando estas estão livres.

Assim, a massa do corpo é menor do que a soma das massas das partículas que o constituem quando estas estão livres.

Relação Energia-Momentum

Para uma partícula (ou corpo) livre de massa m e velocidade u num dado referencial define-se o momentum e a energia total relativística pelas expressões:

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}$$

e dessas expressões segue-se, também para uma partícula ou corpo livre, a relação energia-momentum:

$$E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$$

Partículas de Massa Nula

A expressão acima sugere a existência de partículas de massa nula. Fazendo $m = 0$ resulta:

$$E = pc$$

Para $m \rightarrow 0$ com u / c fixo, as duas primeiras expressões implicam $p \rightarrow 0$ e $E \rightarrow 0$. O mesmo não pode ser dito se se toma $u \rightarrow c$ junto com $m \rightarrow 0$.

Portanto, podem existir partículas de massa nula e momentum e energia diferentes de zero e relacionados pela expressão $E = pc$, desde que se movam com velocidades de módulos iguais ao módulo da velocidade da luz no vácuo.

As partículas associadas à radiação eletromagnética, ou seja, os fótons, são exemplos de tais partículas.

A Inércia dos Fótons

Um trem de ondas eletromagnéticas, mesmo tendo massa nula, tem inércia.

Isso pode ser mostrado considerando-se um sistema rígido de massa M em repouso num certo referencial inercial, sistema esse formado por um tubo longo de comprimento L com dois corpos, A e B, fixos em suas extremidades.

Esses corpos são iguais em tudo, exceto pelo fato de que o corpo A tem uma quantidade de energia E a mais que o corpo B.

Em particular, segundo as concepções clássicas, esses corpos devem ter massas iguais.

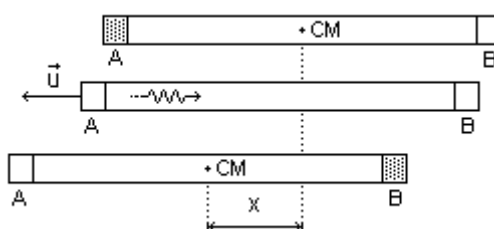


Fig 8.10 – Momento de um Fóton

O corpo A emite, então, um trem de ondas eletromagnéticas, com energia E e extensão espacial muito menor do que o comprimento do tubo, na direção do corpo B.

Segundo a teoria eletromagnética clássica, um trem de ondas eletromagnéticas com energia E tem um momentum de módulo E/c .

Então, no referencial considerado, o sistema recua com uma velocidade cujo módulo é dado, segundo o princípio de conservação do momentum, por:

$$u = E / Mc$$

Depois de um intervalo de tempo Δt , o trem de ondas eletromagnéticas é absorvido pelo corpo B e o sistema volta ao repouso no referencial considerado.

Durante esse intervalo de tempo, o centro de massa (CM) do sistema teve um deslocamento de módulo $x = u\Delta t$ no sentido contrário ao deslocamento do trem de ondas eletromagnéticas.

E se $u \ll c$, $\Delta t \approx L/c$ e:

$$x = EL / Mc^2$$

Finalmente, as posições dos corpos A e B são trocadas pela ação de algum mecanismo interno ao sistema.

Como a posição do centro de massa só pode mudar por efeito de uma ação externa, essa troca se realiza sem mudar a posição do centro de massa do sistema.

Portanto, o sistema se encontra, agora, na situação inicial, exceto pelo deslocamento do seu centro de massa.

Mas esse fato contradiz a afirmativa acima, de que a posição do centro de massa só pode mudar por efeito de uma ação externa.

Para que o centro de massa do sistema permaneça na mesma posição enquanto o sistema de massa M se desloca com velocidade de módulo u num sentido, o trem de ondas eletromagnéticas, que se desloca no sentido oposto com velocidade de módulo c , deve transportar uma inércia que, pelo princípio de conservação do momentum linear, deve ter o valor m dado por:

$$mc = Mu$$

Então, com o valor de u dado acima, segue-se que o conteúdo de inércia de um trem de ondas eletromagnéticas com energia E é dado por:

$$m = E / c^2$$

Esse argumento supõe a existência de corpos rígidos, existência essa proibida pela teoria da relatividade especial.

Caso existissem, os efeitos de uma força aplicada num ponto apareceriam instantaneamente em todos os outros pontos, implicando em interações com velocidade de propagação de módulo infinito.

De qualquer forma, um argumento que considere um corpo não rígido leva a um deslocamento do centro de massa de módulo igual àquele obtido acima.

Relação Massa-Energia

Um fóton com energia E tem momentum de módulo E/c e inércia E/c^2 .

Se um corpo emite um fóton com energia E , diminui a energia e diminui a massa do corpo das quantidades E e E/c^2 , respectivamente.

Se um corpo absorve um fóton com energia E , aumenta a energia e aumenta a massa do corpo das quantidades E e E/c^2 , respectivamente.

Aqui, m representa a massa de uma partícula medida no seu referencial de repouso. Para fótons, $m = 0$. Como, aqui, não se sustenta a idéia de uma massa relativística, diz-se, apenas, que o fóton carrega inércia.

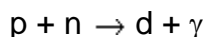
Na teoria da relatividade especial, não se pode manter a lei de conservação da massa (entendida como massa de repouso). Mas a inércia total do sistema, incluindo a inércia dos fótons, é conservada.

Por outro lado, é usual dizer-se que um fóton tem uma inércia equivalente a uma massa igual a E/c^2 . E é apenas nesse sentido que se pode falar na equivalência entre massa e energia na teoria da relatividade especial.

Exemplo

O dêuteron (d) é um núcleo atômico constituído por um próton (p) e um nêutron (n) ligados um ao outro pela força nuclear.

No processo de formação desse núcleo, um fóton γ com cerca de 2,2244 MeV de energia é produzido:



A massa do fóton é nula e as outras massas, em unidades de massa atômica, são:

$$m_p \approx 1,0071 \text{ u}$$

$$m_n \approx 1,0083 \text{ u}$$

$$m_d \approx 2,0130 \text{ u}$$

Nesse processo, a massa (entendida como massa de repouso) não é conservada, ou seja, há o desaparecimento de uma quantidade de massa Δm dada por:

$$\Delta m = (m_p + m_n) - (m_d + m_\gamma) \approx 0,0024 \text{ u}$$

Como:

$$c \approx 2,9979 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$1\text{MeV} \approx 1,6021 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$1\text{u} \approx 1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

segue-se, para a inércia do fóton:

$$\frac{E}{c^2} \approx \frac{2,2244 (1,6021 \times 10^{-13} \text{ J})}{(2,9979 \times 10^8 \text{ m/s})^2} \approx 3,9652 \times 10^{-30} \text{ kg}$$

ou:

$$\frac{E}{c^2} \approx \frac{3,9652 \times 10^{-30} \text{ kg (1u)}}{1,6605 \times 10^{-27} \text{ kg}} \approx 0,0024 \text{ u}$$

A diminuição da massa de repouso do sistema pode ser associada à inércia do fóton.

A inércia do próton mais a inércia do nêutron é igual à inércia do dêuteron mais a inércia do fóton. O conteúdo inercial do sistema é conservado.

Por outro lado, a variação da energia do sistema pode ser escrita:

$$\Delta E = m_d c^2 - (m_p c^2 + m_n c^2) + E$$

ou, levando em conta a variação da massa:

$$\Delta E = [- \Delta m + E / c^2] c^2 = 0$$

Portanto, a energia do sistema é conservada.

As Transformações de Lorentz para energia e momento

Consideremos uma partícula de massa de repouso m_{pr} e velocidade \vec{u} num referencial inercial S. O referencial inercial S' tem velocidade \vec{v} em relação à S. Temos em S:

$$E = \gamma_p m_{pr} c^2$$

$$p_x = \gamma_p m_{pr} u_x$$

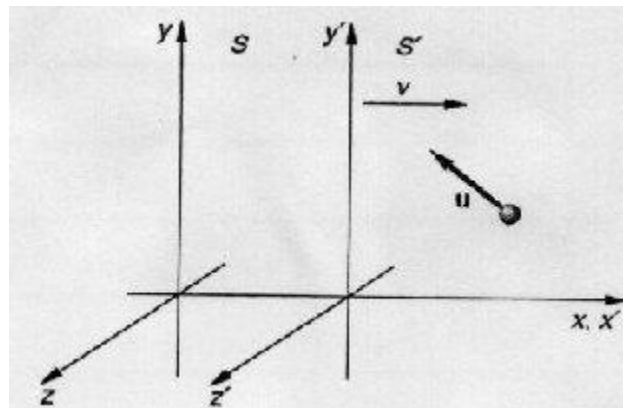
$$p_y = \gamma_p m_{pr} u_y$$

$$p_z = \gamma_p m_{pr} u_z$$

com $\gamma_p = 1 / \sqrt{1 - u^2 / c^2}$. Em S':

$$\begin{aligned}
E' &= \gamma'_p m_{pr} c^2 \\
p'_x &= \gamma'_p m_{pr} u'_x \\
p'_y &= \gamma'_p m_{pr} u'_y \\
p'_z &= \gamma'_p m_{pr} u'_z \quad (*)
\end{aligned}$$

com $\gamma'_p = 1/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$.



Pode-se mostrar (usando as leis de transformação de velocidade) que

$$\frac{1}{\sqrt{1 - u'^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \frac{1 - v u_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

daí segue que:

$$\begin{aligned}
E' &= \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \left[\frac{m_{pr} c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - \frac{m_{pr} c^2 v u_x/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right] \\
&= \gamma (E - v p_x) ,
\end{aligned}$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

onde γ , como usual. Da mesma maneira, podemos escrever para as componentes do momento:

$$\begin{aligned}
p'_x &= \gamma \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right) \\
p'_y &= p_y \\
p'_z &= p_z
\end{aligned}$$

isto pode ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
\frac{E'}{c^2} &= \gamma \left(\frac{E}{c^2} - \frac{vp_x}{c^2} \right) \\
p'_x &= \gamma \left(p_x - v \frac{E}{c^2} \right) \\
p'_y &= p_y \\
p'_z &= p_z \quad (**)
\end{aligned}$$

e tem estrutura similar a:

$$\begin{aligned}
t' &= \gamma \left(t - vx/c^2 \right) \\
x' &= \gamma (x - vt) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}$$

A transformação inversa para a expressão dos momentos é:

$$\begin{aligned}
\frac{E}{c^2} &= \gamma \left(\frac{E'}{c^2} + \frac{vp_x}{c^2} \right) \\
p_x &= \gamma \left(p'_x + v \frac{E'}{c^2} \right) \\
p'_y &= p_y \\
p'_z &= p_z
\end{aligned}$$

Assim, para calcular E', p'_x, p'_y, p'_z , podemos calcular \vec{u}' e usar as equações (*) ou podemos usar as equações (**) (em particular se conhecemos E, p_x, p_y, p_z).

Exemplo: Suponha que um micrometeorito de massa própria 10^{-9} kg esteja passando pela Terra com uma velocidade igual a $0,01 c$. Quais serão a energia e o momento da partícula

do ponto de vista de um observador situado em um sistema S' que esteja se movendo em relação à Terra com uma velocidade $0,5c$ na mesma direção e sentido que o meteorito?

Resposta:

Tomando a direção do movimento do micrometeorito como o eixo x e usando as aproximações apropriadas para $u \ll c$ ($\gamma \approx 1$), temos:

$$\begin{aligned} E &\approx \frac{1}{2}m_{pr}u^2 + m_{pr}c^2 = 10^{-9}kg \left[\frac{(0,01c)^2}{2} c^2 \right] \\ E &\approx 1,00005 \times 10^{-9}cJ \end{aligned}$$

e

$$p_x \approx m_{pr}u_x = (10^{-9}kg)(0,01c) = 10^{-11}c \cdot kg \cdot m/s .$$

$$\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2} = 1,1547 \quad v = 0,5$$

Neste caso, pois $v = 0,5$, portanto os valores de energia e momento em S' são:

$$\begin{aligned} E' &= \gamma(E - vp_x) = (1,1547) [1,00005 \times 10^{-9}c^2 - (0,5c)(10^{-11}c)] \\ &= 1,14898 \times 10^{-9}c^2J \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} p'_x &= \gamma\left(p_x - \frac{vE}{c^2}\right) = (1,1547) \left(10^{-11}c - \frac{(0,5c)(1,00005 \times 10^{-9}c^2)}{c^2}\right) \\ &= (1,1547) (10^{-11} - 5,000025 \times 10^{-10})c \\ &= -0,566 \times 10^{-11}c \cdot kg \cdot m/s \end{aligned}$$

Assim, o observador em S' mede energia total aproximadamente 15% maior e um momento menor de aproximadamente 40% (e na direção $-x$) que um observador em repouso na Terra.

Sugiro, para verificar E' e p'_x , que calculem $\vec{u}' = (u'_x, 0, 0)$ $\gamma'_p = 1/\sqrt{1 - u'^2/c^2}$,
 $E' = \gamma'_p m_{pr} c^2$ e $p'_x = \gamma'_p m_{pr} u'_x$.